Contenido

[1]Véase la nota a pie de página que siguió al enunciado del Lema de Urysohn en la clase del 10 de agosto de 1987.

Prólogo

Estas notas engloban una versión de lo que fue la cátedra de topología impartida por el Doctor Roberto Vázquez García durante más de 40 años a estudiantes de la licenciatura en matemáticas de la Facultad de Ciencias de la U.N.A.M.

Su compilación obedece, entre otras razones, al deseo de que la perspectiva tan singular desde la que Don Roberto miraba lo topológico no quede en el olvido ni resulte inadvertida por las nuevas generaciones de matemáticos.

Si ya el solo punto de vista de un sujeto arbitrario sobre una realidad arbitraria resulta valioso por el carácter de *insustituible* que posee[2], tanto más valioso es cuando el sujeto realiza un esfuerzo de agudeza y consigue afocar con claridad zonas nebulosas de su campo visual. Un esfuerzo así fue el de Roberto Vázquez García.

Tal vez no sea necesario recordarlo, pero Roberto Vázquez y su discípula Graciela Salicrup asistieron como parteros (válganme la expresión) a la matemática en el nacimiento de una de sus hijas más jóvenes: la topología categórica.

Sería muy presuntuoso y hasta falso atribuirle a México el nacimiento de esta rama de las matemáticas, pues es bien sabido que las ideas que dieron lugar a su gestación también fueron captadas por matemáticos de otros lugares del mundo y eran susceptibles de ser advertidas por cualquiera que se hallase a la altura en que oscilaban. Pero la buena ventura quiso que dos matemáticos mexicanos, Graciela Salicrup y Roberto Vázquez, se hallasen a esa altura en el momento adecuado y este agraciado hecho nos permite decir, sin falsedad ni presunción, que la topología categórica *también* nació en México.

Con su talento y dedicación nuestros maestros supieron contribuir notablemente al desarrollo de esta disciplina alcanzando resultados de gran belleza y originalidad. Sin embargo, la muerte de ambos ha interrumpido completamente su cultivo en nuestro país. Es pues la topología categórica una rama de las matemáticas *también* nacida en México pero que en México ya no se cultiva. Grande lástima; en ello se va la oportunidad de que en México exista una escuela de matemáticos encaminada por los propios pioneros sobre la ruta de investigación que ellos mismos trazaron y nutrida con la experiencia de ellos. Momento crítico; la ocasión se nos está yendo, pero quizá aún sea tiempo de evitar su completa fuga.

Mientras trabajaron juntos, Roberto Vázquez y Graciela Salicrup configuraron un plan docente en el que Graciela preparaba estudiantes de licenciatura para los cursos que Roberto impartía en el posgrado; en ese plan, la introducción a la topología ideada por ellos incorporaba elementos categóricos en las construcciones teóricas elementales de la topología, permitiendo extensas generalizaciones que eran un primer encuentro con conceptos propios de la topología categórica. Era pues, además de una introducción a la topología, también una introducción a la topología categórica, y de una claridad tal... ¡Ah caray!, ¿he dicho *era*? ¡He dicho mal!

En efecto, para fortuna nuestra existe memoria de ese plan, y la gana de evocarlo consiente decir que el plan sigue vigente, consiente decir que el plan *es*.

Casi tres años ha que ya circula una edición de las notas que Graciela Salicrup había ido perfeccionando a lo largo de sus cursos y que bajo el título de *Intoducción a la Topología* aparece como el número $\boxed{11}$ de la serie *textos* de las *Aportaciones Matemáticas* (publicación de la Sociedad Matemática Mexicana). Se aplaude el esfuerzo de quienes han hecho posible la aparición del libro que, como sugiere Javier Rosenblueth (coeditor del mismo junto con Carlos Prieto), permite continuar a Graciela con su labor docente.

A raíz del trágico accidente que cegó su vida, el Dr. Vázquez prosiguió con esta labor solo, y por espacio de más de 10 años se ocupó de los cursos de licenciatura que antes dictaba ella, enriqueciéndolos con capítulos extraidos de artículos de investigación que escribieron conjuntamente.

[2]Hay unas ventanas a cuyo través el paisaje que se contempla ofrece una composición única. Lector: son tus ojos. Solamente tú puedes describirnos lo que desde ellos se ve.

La memoria que poseo de esta labor abarca un lustro de ese espacio. Hoy se ofrece al público interesado la primera de tres partes en que se ha dividido el trabajo. El lector hallará limpieza en él, pero no debe esperar el aseo y la pulcritud que son menester cuando se trata de un libro. No se olvide: son *notas tomadas en clase*, literalmente transcritas del pizarrón al cuaderno. Si se hayan bastante limpias ello se debe al cuidado de su autor; Don Roberto siempre supo exponer ordenada y claramente sus ideas, y aún de los más abstrusos sistemas estructurados de pensamiento nos revelaba una sencillez que no parecían tener.

A diferencia de la compilación de notas citada, de la Dra. Salicrup, éstas guardan mucho del estilo peculiar de su autor tratando de que el rescate de la obra también sea el rescate de su persona, tarea difícil de llevar a cabo; la matemática es mostrenca, no se presta para ello.

A lo largo de cada curso, en una u otra clase, el Doctor solía insertar ejercicios que de diez en diez constituían cuestionarios de cada examen parcial. Se ha respetado la aparición de estos ejercicios tal como fue ocurriendo en cada curso, por lo que no se espere una lista ordenada de ellos al final de cada capítulo, (¡no hay capítulos!).

Las notas conservan las fechas en que fueron dictadas; a veces se dispara mucho una fecha de la que le sigue y a veces también se explica en la nota correspondiente qué motivó entonces la suspensión del trabajo. Explicaciones como éstas, así como toda otra intervención ajena a la mano del autor, aparecen intercaladas en el texto con letras cursivas o como notas a pie de página.

En lo referente a notación hay que advertir lo siguiente:

1. Se ha empleado el símbolo $\subseteq$ para denotar contención (a secas), mientras que para la contención propia se emplea $\subset$.
2. Para un conjunto X arbitrario, el símbolo $\mathtt{Pot}\,(X)$ denota a su conjunto potencia.
3. El símbolo $\underset{\circ}{\nabla}$ denota *contradicción.*
4. P.D. abrevia *por demostrar*; p.a. *para algún (*o *alguna); ssi, si y sólo si.* Las palabras *demostración, observación* o *definición* se abrevian (*Dem. Obs. Def.*) cuando son de poca monta o cuando se dan entre un decir y otro.
5. Los teoremas o definiciones que se consideran importantes se subrayan.
6. La *existencia única* se ha denotado alguna vez como $\exists!$
7. El símbolo $._{\ni}.$ dice *tal que.*
8. En lugar del cuadradito ya tradicional se utiliza la arroba (como índice)[3] para señalar que una demostración ha concluído.$_{@}$

La mayor parte de las afirmaciones enunciadas en las notas van acompañadas de una demostración detallada que las justifica. Esto puede fatigar a lectores que ya conocen la materia; se solicita su paciencia. Las notas fueron dictadas para quienes se acercaban por vez primera a la topología y su edición está dirigida a un público similar. Y es que además se busca facilitar el acceso de las nuevas generaciones a una obra cuyo resurgimiento en México favorecería al fortalecimiento de nuestra tradición matemática. Como ya dijimos, la publicación de estas (y las otras) notas devuelve vigencia al plan docente del que ellas forman parte y que ya sólo espera estudiantes para entrar en vigor, por lo que cabe decir, parafraseando a un poeta, que ojalá seas tú el estudiante que estas notas esperan.

México, D. F., a finales de otoño de 1995.

[3] 25 lbs.

Breve Semblanza

Se dice que nacemos y ya esperamos la muerte. Sin embargo, ella, la esperada, casi siempre nos sorprende. El 26 de noviembre de 1994 Roberto Vázquez habría cumplido 79 años de edad; desde el 3 de junio de ese año su aniversario se postergó indefinidamente.

También se dice que somos el producto de nuestro trabajo; pues bien, a partir de ese 3 de junio Vázquez se transformó en la síntesis repentina de su obra, una obra en la que él no dejó de trabajar hasta su muerte[4].

Roberto Vázquez García nació en la Ciudad de México el 26 de noviembre de 1915. Realizó sus "estudios"[5] básicos en las escuelas *Galación Gómez, El Pensador Mexicano* y en la *Secundaria nº 4* entre 1924 y 1931, y en la Escuela Nacional Preparatoria de 1932 a 1934. En 1935 inició sus estudios de matemáticas en el *Departamento de Matemáticas de la U.N.A.M.*, hoy Facultad de Ciencias, hasta obtener el grado de *Maestro en Ciencias* en 1941. Ese año, becado por la *Fundación Rockefeller*, ingresó como estudiante a la Universidad de Princeton, en la que estuvo hasta 1943. En 1946 escribe *Introducción al Cálculo Diferencial e Integral*, libro del que fue coautor con quién 22 años después (durante el difícil año del 68) tendría a su cargo la rectoría de la Universidad, el Ing. Javier Barros Sierra. Cabe mencionar acerca del libro que desde sus primeras ediciones se convirtió en *el texto por excelencia* no sólo para la asignatura correspondiente en la Nacional Preparatoria sino también para los primeros cursos que de esta materia se impartían en facultades como Ingeniería, Ciencias Químicas y Ciencias. Muchos años ha que la U.N.A.M. dejó de editarlo; una lástima. En 1947 el maestro Vázquez obtuvo el grado de *Doctor en Ciencias* en la Facultad de Ciencias de la U.N.A.M. con la tesis *"Funciones Definitivamente Positivas en Espacios Parcialmente Ordenados"*.

Un aspecto curioso de su formación académica es que el campo en el que se especializaba al hacer sus estudios de posgrado era el análisis y no (como se podría suponer) la topología. Justo cuando terminaba su doctorado asistió a una conferencia cuyo impacto lo desvió radicalmente de la ruta que hasta entonces seguía; en ella se anunciaba la aparición de una disciplina nueva en matemáticas: la teoría de categorías. A partir de entonces jamás volvió a dedicarse al análisis, siendo que ya impartía esta asignatura en la Facultad de Ciencias y hasta investigaba sobre este campo como dan testimonio seis artículos que escribió en colaboración con otros autores[6].

Un primer giro lo llevó a la teoría de conjuntos donde encontró *"Una relación entre el número cardinal de un conjunto y su carácter de ser grupo"*[7]. Por este tiempo debió haber empezado sus estudios de topología algebraica porque ya para 1951 presenta *"Tres notas sobre los grupos de cohomología"* en el Congreso Científico Mexicano de ese año. Durante la década que entonces comenzaba, el Dr. Vázquez hizo importantes contribuciones a la topología algebraica. Trabajó con los cuadrasos de Steenrod en la sucesión espectral de

---

[4]No hablo en sentido figurado. Existen unos manuscritos... Seis artículos de investigación, para ser exactos, que el Doctor escribió durante meses de convalecencia en su casa. Aunque todos parecen completos, la caligrafía en dos de ellos (seguramente los últimos) hace notoria la falta de firmeza en el pulso de su autor, y revela que éste se hallaba activo en las postrimerías de su vida.

[5]Entrecomillo la palabra ahorita que me acuerdo que él mismo llegó a decir que recordaba todo aquel periodo escolar de su vida como una fabulosa pérdida de tiempo, cuando coincidió con la opinión que algunos de sus alumnos le externamos en el sentido de creer que los proyectos estatales de educación son una descarada farsa, y de dimensiones tan colosales que para entonces (y aún hoy) la Facultad de Ciencias y la Universidad toda eran un puro y constitucional abuso por ser una falsedad.

[6]Como ejemplos de este haber están: *"El número cardinal de los continuos lineales homogéneos"* (Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, vol. II nº 4) que escribió con Francisco Zubieta en 1945; los *"Teoremas sobre los círculos geodésicos y la curvatura gaussiana"* (Op. cit. vol. III nº 3) que escribió en 1946 con Javier Barros Sierra; y el *"Teorema relacionado con una conjetura de G.D.Birkhoff"* (Op. cit., vol III nº 4), de 1946, en colaboración con Alberto Barajas.

[7]Op. cit. vol. V, 1948, en colaboración con F.Valle.

un espacio fibrado[8], con la cohomología de espacios fibrados esféricamente y sobre clases características generalizadas[9]. En 1953 es distinguido con el cargo de Profesor Visitante en la Universidad de Princeton donde permanece hasta 1954. En el último invierno de esa década Roberto Vázquez viajó a Francia como Investigador de Intercambio con aquel país; allá estuvo, hasta febrero del siguiente año, asistiendo al seminario de Henri Cartan (destacado miembro del grupo Bourbaki) en el Instituto Henri Poincaré.

En 1961 el Dr. Vázquez escribe un artículo *"Sobre el anillo de cohomología módulo 2 de un espacio fibrado esféricamente"*, iniciando así un ligero viraje del rumbo que hasta entonces llevaba en topología algebraica y que lo llevará a explorar otra área de las matemáticas afín a ésta (de hecho surge de la topología algebraica) pero que se desentiende del aspecto topológico: es el álgebra homológica. A esta área está netamente adscrita su ponencia sobre productos directos de módulos planos que presenta en el Congreso Nacional de Matemáticas celebrado en Jalapa en 1962, así como sus trabajos sobre módulos proyectivos que da a los anales del Instituto ese año y el siguiente.[10]

Su experiencia docente fue adquiriéndola desde 1937, año en que ocupa plazas de profesor en la Escuela Nacional Preparatoria y en la *Escuela Nacional de Ingeniería* (hoy Facultad de Ingeniería), mismas que desempeñó durante 9 y 10 años, respectivamente. Fue profesor de la Facultad de Ciencias desde 1941 hasta el tercer año de esta década; en ella impartió (primero) las asignaturas de *Teoría de Funciones de Variable Real, Análisis Matemático I* y *II,* (y después) *Introducción a la Topología, Topología Algebraica* y *Seminarios de Topología Categórica.*

Debió ser por ahi de 1966 que Graciela Salicrup comenzó a asistir a los cursos de topología del Dr. Vázquez. Por entonces él desviaba de nuevo el rumbo en su línea de investigación con otro giro leve que esta vez lo hacía pasar del álgebra homológica a la teoría de categorías, como atestigua su artículo de 1967[11]. En 1969 Graciela se titula bajo su dirección y para 1970 ya escriben un artículo conjuntamente: *"Fibraciones y correflexiones"*, tema en el que mantienen puesta su atención y sobre el cual escriben un segundo artículo el año siguiente. Fue al cabo de este trabajo que empezaron a establecer una profunda relación entre la teoría de categorías y la topología, contribuyendo decisivamente en el nacimiento de la topología categórica.

En 1972 dan a conocer a la comunidad matemática nacional e internacional el concepto de *categoría de conexión* en un artículo que así titulan, *Categorías de Conexión*[12]. Por su sola belleza este trabajo puede considerarse la obra maestra de ambos autores. A partir de esa fecha la conexidad (y su "contraparte", la coconexidad) se convertirá en tema recurrente a lo largo de sus vidas. Cabe añadir que por entonces Don Roberto tenía a su cargo la dirección del Instituto de Matemáticas (venía dirigiéndolo desde 1966); puede decirse, por lo tanto, que en esa fecha Roberto Vázquez alcanzaba una cima en su carrera académica. Un artículo por año será el promedio de lo que escriba con su discípula y colega durante esa década.

En 1978 Graciela obtiene el doctorado con la tesis *"Epirreflexividad y Conexidad en Categorías Concretas Topológicas"* dirigida por él. Ese año un connotado teórico de la topología categórica, Horst Herrlich, visita México e inicia con ellos una investigación acerca de estructuras de factorización de fuentes de morfismos en categorías que, a decir del propio Herrlich, por entonces ≪emergía lentamente como una de las herramientas categóricas más útiles≫. Antes de regresar a su país, Herrlich les extiende una invitación para asistir a la

---

[8] Op. cit. vol. II nº 1, 1957.

[9] Revista de la Unión Matemática Argentina, vol. XIX.

[10] También habría que mencionar como inscritos en este campo sus trabajos sobre *"Gavillas con valores en categorías"* (An. Inst. Mat., vol. 3, 1963) y el artículo sobre *"Funtores hemiexactos"* (Op. cit., vol. 4, 1964) escrito en colaboración con Humberto Cárdenas.

[11] *"La categoría de los triples en una categoría"* Op. cit., vol. 5

[12] El Dr. Vázquez incorporó un extenso fragmento de este artículo a su cátedra. Las notas fechadas entre el 9 de noviembre de 1987 y el 18 de enero de 1988 son las que le corresponden en esta compilación.

Don Roberto jamás nos mencionó la existencia del artículo y mucho menos nos dijo que el concepto se debía a él o a la Dra. Salicrup; nos expuso el tópico como nos exponía cualquier otro. A mí me gustó el tema y lo preparé para dar una plática en un taller de topología que se organizó durante el encuentro de la A.M.S. y la S.M.M. celebrado en Mérida en 1993. En vísperas de la celebración le expuse el tema a Javier Páez que muy amable se prestó a escucharme de tarde en tarde. Pronto nos surgieron dudas de fondo que mis notas no ayudaban a resolver; sobre todo nos preguntábamos qué ideas se tenían en mente al momento de manipular tan ingeniosamente como se hacía al espacio de Sierpinski y si ideas de ese estilo (conjeturábamos cuáles eran) sugerían poner los ojos en los espacios T_0... Puedo hacer esto más largo (lo es), pero para no hacerlo les diré, en fin, que éstas y otras razones que ya no cuento me llevaron a enterarme *por casualidad* que a Roberto Vázquez y Graciela Salicrup es a quienes debemos este estudio tan fino y sutil de lo conexo.

Conferencia Internacional sobre Topología Categórica a celebrarse en Berlín ese mismo año. En esa conferencia participan con la ponencia *"Connection and Disconnection"* en la que muchos de sus hallazgos previos los hacen extensivos a una clase más vasta de categorías (no necesariamente topológicas) caracterizando la conexidad en ellas mediante procedimientos ideados por ellos, ≪ilustrando así la relación entre conexidad y correflexividad≫[13]. Al año siguiente son coautores con Herrlich en dos artículos que serán los últimos que escriban juntos: *"Dispersed factoritation estructures"*[14] y *"Light factoritation structures"*[15]; el primero, junto con dos trabajos de otros matemáticos, cierra la investigación acerca de estructuras de factorización de fuentes, en tanto que el segundo analiza estructuras de factorización más sutiles relacionadas con problemas de conexidad. Ambos trabajos insuflan a sus autores inercia suficiente para proseguir sus investigaciones.

En 1980 Graciela publica un artículo sobre *Subcategorías normales de conexión*[16], mientras que el artículo de Roberto de ese año versa sobre *Homotopía y forma en categorías topológicas*[17]. En 1981 Vázquez retoma el tema de la conexidad y escribe *Un enfoque correcto de la teoría de la conexidad*[18], asunto al que vuelve en 1982 cuando trata la *Conexidad en diversas subcategorías de categorías topológicas*[19] y en 1983 con el artículo *Sobre la esencialidad del concepto de conexidad*[20].

En 1984 el Consejo Interno del Instituto de Matemáticas acordó (por unanimidad) presentar la candidatura de los profesores Dr. Roberto Vázquez García y Dr. Guillermo Torres Díaz a *Investigadores Eméritos* ≪ en atención a sus méritos relevantes y a los valiosos servicios que han prestado a la Universidad durante los largos años de dedicación a la misma.≫ La ceremonia correspondiente a tales designaciones no se celebró sino hasta mediados de 1985, cuando el Doctor ya dictaba las primeras notas de este trabajo.

La última vez que se le rindió homenaje fue el 25 de febrero de 1994 en una reunión de la Sociedad Matemática Mexicana. Muchos asistimos con la esperanza de verlo, pero lo delicado de su salud le impidió ir y en su lugar asistió su hija Isabel. Se hizo un brindis en su honor, se interpretó música (hubo una flauta, y una guitarra también hubo), una linda señorita cantó canciones antiguas en francés, se pronunciaron discursos... Jamás volvimos a verlo.

Al día siguiente a su fallecimiento en varios muros del Instituto apareció anónimamente una elegía que recogí entonces y que transcribo a continuación.

---

[13] *"Graciela Salicrup -her mathematical work"*; Horst Herrlich, Aportaciones Matemáticas, Notas de Investigación Nº $\boxed{2}$, Sociedad Matemática Mexicana, 1988.
[14] Canadian Journal of Mathematics, vol.XXXI, nº 5.
[15] Quaestiones Mathematicae, vol. 3 (Universidad de Sudáfrica).
[16] An. Inst. Mat. vol. 20.
[17] Memorias del Seminario Especial de Topología, vol. I
[18] An. Inst. Mat. vol 21 nº 2.
[19] Op. cit. vol. 22.
[20] Op. cit. vol. 23.

Adiós

*≪Dicen que es un gran segador
que se llama Muerte.≫*

Si hay mar allá,
séate un tiempo favorable;
séante noches tranquilas
las del estío porvenir de ultramar.

Si sólo es el declive natural del vivir,
háyale sido, Doctor,
serena vuestra ida.
Háyale sido oportuno
el momento en que sombra y luz se fundieron
cuando la hélice dialéctica
(¡y qué fríamente!)
os impuso medir
de su feroz vuelta la torsión.

Ya así o de otro modo,
bogará el mar de mi memoria;
navegará recuerdos.
Un viento de mis sueños
hinchará el pecho de su vela
que en lontananza no se perderá,
pues ya derramaba para siempre
su luz propia de estrella.

Viva fe de ese lucero queda en la obra.
Usted supo, Roberto Vázquez García, que
por haber cultivado el Vergel Sublime
hoy crece hacia lo alto aquella flor rara.

Agradecimientos

A Guillermo Gómez Alcaraz, que desde el momento en que supo que se trataba de un trabajo del Dr. Vázquez se interesó en publicarlo.

A Santiago López de Medrano, que desde que hubo el interés por hacer el trabajo prestó el espacio físico y electrónico para que se llevase a cabo.

A María de la Paz Álvarez y a Mario Eudave Muñoz, que se privaron del ayudante de sus cursos para que éste vacara en escribir estas notas.

A Javier Páez Cárdenas por su asesoría amable y desinteresada.

A Isabel Puga y demás miembros del Consejo Departamental de Matemáticas por el apoyo brindado y por la confianza depositada.

A Čeva, a Menelao... ¡y a Sierpinski!, por engrandecer el espíritu humano.

1

Conceptos Básicos

En topología se llaman conceptos básicos aquellos cuyas propiedades pueden condensarse en un sistema de axiomas a partir del cual es posible iniciar el estudio de la topología. El concepto mismo de topología es, desde luego, un concepto básico de ésta, pero no es el único; puede demostrarse (y lo haremos en su momento) que a este concepto se puede llegar partiendo de otros como son la idea de frontera o la de interior de un conjunto. Cualquiera conduce a donde conducen los demás; son todos hoyos de acceso que nos permiten la fuga al raro orbe de lo topológico.

1.1 Conjuntos Abiertos

Definiciones. Por **espacio euclidiano de dimensión n** entenderemos al espacio vectorial real de n dimensiones provisto de la métrica usual. Denotaremos a este espacio por $\mathbb{E}^n$ o como pareja: $(\mathbb{R}^n, \rho)$, donde $\mathbb{R}^n$ denota al espacio vectorial real de n dimensiones y ρ a la métrica usual en $\mathbb{R}^n$, o sea, ρ es la función

$$\rho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida para cualesquiera vectores

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n)\,,\ y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$$

mediante

$$\rho\,(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Para $x \in \mathbb{R}^n$ y cualquier número $\varepsilon > 0$ definimos el **disco abierto n-dimensional de centro en x y radio** ε como el conjunto

$$D_\varepsilon\,(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \rho\,(x, y) < \varepsilon\}$$

Diremos que un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ es **abierto en** $\mathbf{E^n}$ si para todo punto de A es válida la implicación siguiente:

$$x \in A \Rightarrow \exists \varepsilon > 0._\ni.D_\varepsilon\,(x) \subset A$$

Si denotamos con τ a la familia de conjuntos abiertos de $\mathbb{E}^n$, observamos que se satisfacen las condiciones siguientes:

(i) $\mathbb{R}^n, \emptyset \in \tau$

(ii) $(A_j)_J \subseteq \tau \Rightarrow \bigcup\limits_{j \in J} A_j \in \tau$

(iii) $A_1, A_2 \in \tau \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau$

Al hacer extensivas estas propiedades a cualquier conjunto X reciben el nombre de ***axiomas de los conjuntos abiertos*** *porque a través de ellas es que se define el concepto de topología.*

Definición. Sea X un conjunto arbitrario. Una **topología para X** es una familia τ de subconjuntos de X que satisfaga las condiciones siguientes:

(i) $X, \emptyset \in \tau$

(ii) Si J es cualquier conjunto de índices y $A_j \in \tau$, $\forall j \in J$, entonces $\bigcup\limits_{j \in J} A_j \in \tau$

(iii) Si $A_1, A_2 \in \tau$, entonces $A_1 \cap A_2 \in \tau$

Si τ es una topología para X, entonces llamaremos **abiertos en X** a los miembros de τ y hablaremos de la pareja (X, τ) como de un **espacio topológico** del que X será el **conjunto subyacente.**

Ejemplos de abiertos: i) Si $\texttt{Pot}(X)$ denota a la familia de todos los subconjuntos de X, entonces $\tau = \texttt{Pot}\,(X)$ es una topología para X conocida con el nombre de **topología discreta.**

ii) Si $\tau = \{X, \emptyset\}$, entonces τ es una topología para X conocida como **topología indiscreta.**

iii) La llamada **topología usual de $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$** es la familia

$$\tau = \{A \subseteq \mathbb{R}^n : A \textit{ es abierto en } \mathbb{E}^n\}$$

iv) Siendo X cualquier conjunto y A cualquier subconjunto de X, $\tau = \{X, A, \emptyset\}$ es una topología para X.

v) Si $X = \{x_1, x_2\}$, entonces sus topologías con tres elementos son

$$\tau_1 = \{X, \{x_1\}, \emptyset\} \quad \text{y} \quad \tau_2 = \{X, \{x_2\}, \emptyset\}$$

1.2 Conjuntos Cerrados

Como iremos advirtiendo a lo largo del curso, entre muchos pares de conceptos de la topología suele darse una relación de aparente oposición que no es propiamente tal pues en cada par de conceptos tanto de uno de ellos como del otro pueden extraerse propiedades que den lugar al desarrollo completo de la teoría sin que por ello pueda decirse tampoco que coincidan. El primer ejemplo de tal relación nos lo ofrece, aparejado al concepto de conjunto abierto, el concepto de conjunto cerrado; ambos conceptos no son opuestos ni son iguales: son duales.

Definición. Sea (X, τ) un espacio topológico cualquiera. Se dice que un subconjunto C de X es **cerrado en X** si su complemento en X es abierto, es decir, si $X - C \in \tau$.

TEOREMA. Si $\Im$ es la familia de subconjuntos cerrados de (X, τ), entonces:

(i) $X, \emptyset \in \Im$

(ii) Si $(C_j)_J \subseteq \Im$, entonces $\bigcap_{j\in J} C_j \in \Im$

(iii) Si $C_1, C_2 \in \Im$, entonces $C_1 \cup C_2 \in \Im$

Recíprocamente, si $\Im$ es una familia de subconjuntos de X que satisface las condiciones anteriores, entonces la familia τ de complementos de los miembros de $\Im$ constituye una topología para X y los cerrados de (X, τ) coinciden con los elementos de $\Im$.

Demostración. (i) $X \in \Im$ porque $X - X = \emptyset \in \tau$; análogamente, $\emptyset \in \Im$ porque $X - \emptyset = X \in \tau$.

(ii) Supongamos que$(C_j)_J \subseteq \Im$; entonces $X - C_j \in \tau$, $\forall j \in J$. Luego, por el segundo axioma que define a una topología, tenemos:

$$\bigcup_{j\in J} (X - C_j) \in \tau$$

y como, según las leyes D'Morgan,

$$\bigcup_{j\in J} (X - C_j) = X - \bigcap_{j\in J} C_j$$

entonces resulta que $\bigcap_{j\in J} C_j \in \Im$.

(iii) Sean $C_1, C_2 \in \Im$; entonces $(X - C_1), (X - C_2) \in \tau$, de modo que, por el tercer axioma para conjuntos abiertos, tenemos:

$$(X - C_1) \cap (X - C_2) \in \tau$$

Por las leyes D'Morgan sabemos que

$$(X - C_1) \cap (X - C_2) = X - (C_1 \cup C_2)$$

de donde resulta que $C_1 \cup C_2 \in \Im$

Ahora supongamos que $\Im = \{C_\alpha : \alpha \in K\}$ es una familia de subconjuntos de X que satisface las condiciones (i),(ii),(iii) anteriores. Sea $\tau = \{X - C_\alpha : \alpha \in K\}$; veremos que τ satisface los axiomas que definen una topología.

(i) $X, \emptyset \in \tau$ porque $\emptyset, X \in \Im$

(ii) Si J es cualquier subconjunto de K, entonces

$$\bigcup_{\alpha\in J} (X - C_\alpha) = X - \bigcap_{\alpha\in J} C_\alpha \in \tau$$

porque, de acuerdo con (ii), $\bigcap_{\alpha \in J} C_\alpha \in \Im$. Esto significa que τ es cerrada bajo uniones arbitrarias, como exige el segundo axioma de los abiertos.

(*iii*) Por último, como,según (iii), la unión de cualesquiera dos miembros de $\Im$ es un miembro de $\Im$, entonces para cualesquiera $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ tenemos

$$(X - C_{\alpha_1}) \cap (X - C_{\alpha_2}) = X - (C_{\alpha_1} \cup C_{\alpha_2}) \in \tau$$

lo que significa que τ es cerrada bajo la formación de intersecciones finitas como establece el tercer axioma de abiertos, y el teorema queda demostrado.@

En analogía con los axiomas de los abiertos, podemos hablar de las propiedades (i),(ii),(iii) del teorema anterior como de los ***axiomas de los conjuntos cerrados****. Del teorema mismo queda justificado este nombre, pues en él se hace ver que la idea de topología puede derivarse de estas propiedades. Nótese la armonía existente entre unos axiomas y otros; lo que uno establece para el conjunto vacío, por ejemplo, el otro lo sienta para la totalidad del espacio; lo que uno afirma para uniones el otro lo hace para intersecciones, etcétera. Esta armonía entre los resultados establecidos es la* ***dualidad****.*

Ejemplos de cerrados: i) X y $\emptyset$ siempre son conjuntos cerrados.

ii) $\{x\}$ es un cerrado de $\mathbb{E}^n$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

iii) Cuando τ es discreta o indiscreta todo abierto es cerrado y viceversa; es decir, en ambos casos la familia $\Im$ de conjuntos cerrados es τ.[1]

Observación: A partir del segundo ejemplo podemos darnos cuenta de que la unión arbitraria de conjuntos cerrados no es necesariamente cerrada (ya que si lo fuera, entonces cualquier conjunto en $\mathbb{R}^n$ sería cerrado).

1.3 Cerradura de un conjunto

Otro par de conceptos duales son los de cerradura e interior. Comenzaremos a hablar del de cerradura.

Definición. Sean (X, τ) un espacio topológico arbitrario y $A \subseteq X$. Definimos la **cerradura de A** como el subconjunto cerrado mínimo de X que contiene a A. Denotaremos a este conjunto como $\overline{A}$.

Obsérvese que la existencia de este conjunto siempre puede garantizarse, pues siempre podemos pensar en él como en la intersección de todos los cerrados que contienen a A. Por otra parte, a partir de la definición es evidente que si A y B son subconjuntos de X y $A \subseteq B$, entonces $\overline{A} \subseteq \overline{B}$. Nos valdremos de esto en la prueba del siguiente resultado.

Lema. Sea (X, τ) un espacio topológico arbitrario y sean $A, B \subseteq X$. Entonces

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Demostración. ($\subseteq$) De la definición tenemos $A \subseteq \overline{A}$ y $B \subseteq \overline{B}$, de donde

$$A \cup B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$$

y a consecuencia de la observación precedente tenemos

$$\overline{A \cup B} \subseteq \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$$

Pero $\overline{A} \cup \overline{B}$ es cerrado; luego

$$\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

y

$$\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}.$$

($\supseteq$) Por la observación precedente tenemos

$$A \subseteq A \cup B \ y \ B \subseteq A \cup B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{A \cup B} \ y \ \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$$

[1] ¿$\tau = \Im \Rightarrow \tau$ discreta o indiscreta?

por lo tanto

$$\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}.$$

Esto concluye la demostración del lema.@

Ejemplos de cerradura: i) Si τ es la topología discreta, entonces $\overline{A} = A, \forall A \subseteq X$. En efecto, ya dijimos que en este caso $\Im = \texttt{Pot}\,(X)$; de ahí que el cerrado mínimo que contiene a cada subconjunto de X sea el subconjuto mismo.

ii) Si τ es la topología indiscreta, entonces $\Im = \{\emptyset, X\}$ y en consecuencia

$$\overline{A} = \begin{cases} X, & si\ A \neq \emptyset \\ \emptyset, & si\ A = \emptyset \end{cases}$$

Antes de referir nuestro tercer ejemplo definamos qué es la distancia de un punto a un conjunto.

Definición. Sean, $\alpha \in \mathbb{R}^n$ y $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$. Definimos la **distancia de α a A** como

$$\rho(\alpha, A) = \inf \{\rho(\alpha, a) : a \in A\}$$

iii) Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x, A) = 0\}$$

Probaremos esto.

Comencemos caracterizando los abiertos de $\mathbb{E}^n$ mediante alguna propiedad métrica. Observemos que de acuerdo con la definición, si τ denota a la topología usual de $\mathbb{E}^n$, entonces

$$A \in \tau \Rightarrow \forall a \in A \exists \varepsilon > 0. \ni . D_\varepsilon(a) \subset A;$$

pero entonces

$$\forall a \in A \exists \varepsilon > 0. \ni . \mathbb{R}^n - A \subset \mathbb{R}^n - D_\varepsilon(a)$$

de modo que si $x \in \mathbb{R}^n - A$, entonces $\rho(x, a) \geq \varepsilon$; y como ε siempre es estrictamente positivo, entonces podemos concluir como sigue:

$$A \in \tau \Rightarrow \rho(a, \mathbb{R}^n - A) > 0, \forall a \in A.$$

Para probar que esto caracteriza a los conjuntos abiertos de $\mathbb{E}^n$ hay que asegurar que se verifica la implicación en sentido contrario comprobando que si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es tal que $\rho(a, \mathbb{R}^n - A) > 0, \forall a \in A$, entonces A satisface la definición de abierto en $\mathbb{E}^n$. Obsérvese que para tal A y para $a \in A$ arbitraria, haciendo $\varepsilon = \rho(a, \mathbb{R}^n - A)$, entonces necesariamente $D_\varepsilon(a) \subseteq A$, pues si hubiese algún $x \in D_\varepsilon(a) \cap (\mathbb{R}^n - A)$, entonces

$$\rho(a, x) < \varepsilon = \inf \{\rho(a, x) : x \in \mathbb{R}^n - A\}$$

lo que sería absurdo. Esto demuestra que los abiertos en $\mathbb{E}^n$ son aquellos conjuntos para los cuales siempre media una distancia positiva entre cualquiera de sus puntos y su complemento.

De aquí podemos extraer como corolario una caracterización de los conjuntos cerrados. Sabemos que si $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es cerrado entonces $\mathbb{R}^n - C$ es abierto, lo cual, por lo que acabamos de ver, es equivalente a que

$$\rho(x, C) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n - C;$$

o sea que la distancia de todo punto del complemento de un cerrado al cerrado mismo es mayor que cero, y por consiguiente un punto del espacio que diste cero de C no puede estar en el complemento de C; en consecuencia podemos afirmar que el cerrado C contiene a todos los puntos del espacio que distan cero de C. Y como, recíprocamente, al ser C un conjunto que contiene a todos los puntos que de él distan cero entonces

$$\rho(x, C) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n - C$$

lo cual significa que $\mathbb{R}^n - C$ es abierto y, por tanto, que C es cerrado, entonces podemos concluir diciendo que un conjunto C es cerrado en $\mathbb{E}^n$ si, y sólo si, C contiene a todos los puntos que distan cero de C.

Ahora probaremos lo enunciado en (iii). Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea

$$\tilde{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x, A) = 0\}$$

Para probar que $\tilde{A}$ es la cerradura de A hay que probar que $\tilde{A}$ es cerrado y que es el más chico de los cerrados que contienen a A. Para probar que es cerrado nos valdremos de la caracterización que hallamos probando que $\tilde{A}$ contiene a todos los puntos que distan cero de $\tilde{A}$. Sea entonces $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\rho\left(x, \tilde{A}\right) = 0$; entonces

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{a} \in \tilde{A}. \ni . \rho(x, \tilde{a}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

y dado que $\rho(\tilde{a}, A) = 0$ (ya que $\tilde{a} \in \tilde{A}$), entonces

$$\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A. \ni . \rho(\tilde{a}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por la desigualdad del triángulo tenemos

$$\rho(x, a) \leq \rho(x, \tilde{a}) + \rho(\tilde{a}, a) < \varepsilon;$$

luego

$$\rho(x, a) < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0; \quad \therefore \ \rho(x, a) = 0; \quad \therefore \ x \in \tilde{A}$$

Por lo tanto $\tilde{A}$ es cerrado.

Por otra parte, es claro que $A \subseteq \tilde{A}$, y si C fuese otro cerrado que contuviese a A, entonces para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\rho(x, A) = 0$ (i.e. $\forall x \in \tilde{A}$) también tendríamos $\rho(x, C) = 0$ y, por lo tanto, $x \in C$, puesto que, siendo cerrado, C ha de contener a todo punto que de él diste cero. Esto prueba que $\tilde{A}$ es el cerrado mínimo que contiene a A; es decir, que $\tilde{A} = \overline{A}$.@

TEOREMA. Sean, (X, τ) un espacio topológico y $A, B \subseteq X$ arbitrarios. Entonces

(a) $A \subseteq \overline{A}$

(b) $\overline{\emptyset} = \emptyset$

(c) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(d) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

(e) $A \in \Im \Leftrightarrow A = \overline{A}$

Recíprocamente, si en un conjunto X se asocia a todo subconjunto A otro subconjunto $\overline{A}$ de tal manera que se satisfagan las condiciones (a), (b), (c), (d), entonces existe una topología τ para X en la cual la familia de conjuntos cerrados es

$$\Im = \left\{A \subseteq X : A = \overline{A}\right\}$$

siendo, además, $\overline{A}$ la cerradura de A en (X, τ).

Demostración: (a) $A \subseteq \overline{A}$ porque $\overline{A}$ es el cerrado mínimo que contiene a A.

(b) $\overline{\emptyset} = \emptyset$ porque $\emptyset$, al ser cerrado, es el cerrado mínimo que contiene al $\emptyset$.

(c) Por el lema anterior $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(d) $\overline{A}$ es cerrado; luego, el cerrado mínimo que contiene a $\overline{A}$ es $\overline{A}$, i.e. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

(e) Si A es cerrado, entonces A es el cerrado mínimo que contiene a A, i.e. $A = \overline{A}$. Por su parte, si $A = \overline{A}$, entonces A es cerrado porque $\overline{A}$ lo es por definición.

Supongamos ahora que X es un conjunto en el que a cada subconjunto suyo se ha asociado otro subconjunto, también suyo, de tal manera que se satisfagan las condiciones (a), (b), (c), (d) anteriores. Siendo así, probaremos que la familia $\Im$ de aquellos subconjuntos de X que coinciden con sus asociados satisface, a su vez, los axiomas de los conjuntos cerrados enunciados en el teorema anterior. Por ese teorema sabemos que cuando esto ocurre, la familia de complementos de los miembros de $\Im$ constituye una topología para X según la cual $\Im$ es la familia de conjuntos cerrados.

(i) Por (a), para X debemos tener $X \subseteq \overline{X}$; pero al significar X la totalidad del espacio, entonces también $\overline{X} \subseteq X$; por lo tanto, $X = \overline{X}$. De esto, y de (b), tenemos: $X, \emptyset \in \Im$.

(ii) Para probar que $\Im$ es cerrada bajo la formación de intersecciones arbitrarias nos valdremos de la implicación $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$ cuya validez se infiere con facilidad de las condiciones (a), (b), (c), (d).

Sea $(C_j)_J$ una subfamilia arbitraria de miembros de $\Im$. Por definición de intersección tenemos

$$\bigcap_{j \in J} C_j \subseteq C_j, \forall j \in J$$

de modo que, de la implicación anterior resulta

$$\overline{\bigcap_{j\in J} C_j} \subseteq \overline{C_j}, \forall j \in J;$$

y como cada C_j es miembro de $\Im$, entonces $C_j = \overline{C_j}, \forall j \in J$.

$$\begin{aligned} \therefore\ \overline{\bigcap_{j\in J} C_j} &\subseteq C_j, \forall j \in J; \\ \therefore\ \overline{\bigcap_{j\in J} C_j} &\subseteq \bigcap_{j\in J} C_j \end{aligned}$$

y como, por su parte, (a) nos garantiza que

$$\bigcap_{j\in J} C_j \subseteq \overline{\bigcap_{j\in J} C_j}$$

entonces resulta que $\bigcap_{j\in J} C_j \in \Im$, como se quería demostrar.

(iii) Sean C_1 y C_2 miembros arbitrarios de $\Im$; entonces $\overline{C_1} = C_1$ y $\overline{C_2} = C_2$. De esto y de (c) resulta

$$\overline{C_1 \cup C_2} = C_1 \cup C_2$$

Por lo tanto, $C_1 \cup C_2 \in \Im$, que es lo que se quería demostrar.

Como ya dijimos, lo anterior es garantía de que existe una topología τ para X según la cual $\Im$ es la familia de los conjuntos cerrados de X. Sólo falta probar que en el espacio topológico así construido, $\overline{A}$ es la cerradura de A.

Sea $A \subseteq X$; por (a) $A \subseteq \overline{A}$, y por (d) $\overline{A} \in \Im$. Por lo tanto, $\overline{A}$ es un cerrado que contiene a A. Para mostrar que es el mínimo supongamos que C es cualquier otro cerrado que contiene a A; entonces $C \in \Im$ y $A \subseteq C$; por lo tanto, $\overline{A} \subseteq \overline{C} = C$. Esto prueba que $\overline{A}$ es la cerradura de A en (X, τ), y el teorema queda demostrado.@

Como acabamos de ver, las condiciones (a), (b), (c), (d) del teorema son las que en este caso pueden postularse para iniciar el desarrollo de la topología a partir de este concepto básico que es el de cerradura. Estas condiciones se conocen como los **axiomas de Kuratowski.**

Ejemplo: Sea X un conjunto arbitrario; para $A \subseteq X$ definimos

$$\overline{A} = \begin{cases} A, \text{ si } A \text{ es finito} \\ X, \text{ si } A \text{ es infinito} \end{cases}$$

(El caso en que X es finito deriva en la topología discreta). Bajo esta definición se satisfacen los axiomas de Kuratowski y la topología inducida recibe el nombre de **topología cofinita.**[2]

1.4 Interior de un conjunto

Ahora nos referiremos al concepto dual al de cerradura, nos referiremos al concepto de interior. Si la cerradura de un conjunto es el más chico de los cerrados que contienen al conjunto, la dualidad nos hace sospechar que el interior ha de ser el más grande de los abiertos contenidos en el conjunto; si la cerradura podemos pensarla como la intersección de todos los cerrados que contienen al conjunto, para el interior se pensará en la unión de todos los abiertos contenidos en él. Desde luego, esta útil y curiosa armonía estará manifiesta en cada resultado que ataña a uno u otro concepto, siendo así que cualquier teorema enunciado para cerradura induce otro teorema (el dual) para interior, y viceversa.

Definición. Sean, (X, τ) es un espacio topológico y $A \subseteq X$; definimos el **interior de A** como la unión de la familia de abiertos en (X, τ) contenidos en A. Al interior de A lo denotaremos como $\overset{\circ}{A}$ o como $intA$.

Junio 5 de 1985.

[2] De ella hablaremos el 9 de septiembre de 1985.

LEMA. Sea (X,τ) un espacio topológico arbitrario; si $A\subseteq X$, entonces:
i) $X-\overset{\circ}{A}=\overline{X-A}$
ii) $X-\overline{A}=(X-A)^{\circ}$
Demostración. (i) Por definición de interior

$$\overset{\circ}{A}=\bigcup_{\substack{G\in\tau\\ G\subseteq A}} G$$

Por lo tanto

$$X-\overset{\circ}{A}=X-\bigcup_{\substack{G\in\tau\\ G\subseteq A}} G=\bigcap_{\substack{G\in\tau\\ G\subseteq A}}(X-G)$$

Pero si G es abierto y está contenido en A, entonces $X-G$ es cerrado y contiene a $X-A$; y como para cada cerrado que contenga a $X-A$ existe un abierto contenido en A, entonces al tomar esta intersección sobre todos los abiertos contenidos en A se está intersectando a todos los cerrados que contienen a $X-A$. Luego

$$\bigcap_{\substack{G\in\tau\\ G\subseteq A}}(X-G)=\overline{X-A}.$$

Por lo tanto, $X-\overset{\circ}{A}=\overline{X-A}$.
(ii) Siendo $\Im$ la familia de cerrados de (X,τ) tenemos

$$\overline{A}=\bigcap_{\substack{C\in\Im\\ C\supseteq A}} C$$

Luego

$$X-\overline{A}=X-\bigcap_{\substack{C\in\Im\\ C\supseteq A}} C=\bigcup_{\substack{C\in\Im\\ C\supseteq A}}(X-C)$$

Pero si C es cerrado y contiene a A, entonces $X-C$ es abierto y está contenido en $X-A$; y como para cada abierto contenido en el complemento de A existe un cerrado que contiene a A, entonces al considerar esta unión sobre todos los cerrados que contienen a A se está uniendo a todos los abiertos contenidos en $X-A$, lo cual, según la definición de interior, es el interior de $X-A$. Por lo tanto, $X-\overline{A}=(X-A)^{\circ}$, como se quería probar.@

TEOREMA. Sean, (X,τ) es un espacio topológico y $A,B\subseteq X$, arbitrarios. Entonces
(a) $\overset{\circ}{A}\subseteq A$
(b) $\overset{\circ}{X}=X$
(c) $(A\cap B)^{\circ}=\overset{\circ}{A}\cap\overset{\circ}{B}$
(d) $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}}=\overset{\circ}{A}$
(e) $A\in\tau\Leftrightarrow A=\overset{\circ}{A}$

Recíprocamente, si X es un conjunto arbitrario y a todo subconjunto A de X se le asocia otro, $\overset{\circ}{A}$, de tal modo que se cumplan las condiciones (a), (b), (c), (d), y se define

$$\tau=\left\{A\subseteq X : A=\overset{\circ}{A}\right\}$$

entonces τ es una topología para X según la cual el interior de A es $\overset{\circ}{A}$.

Demostración. (a) De acuerdo con la definición, si $x\in\overset{\circ}{A}$ entonces $x\in G$, para algún abierto $G\subseteq A$, y por lo tanto $x\in A$.
(b) $\overset{\circ}{X}=X$ porque X es un abierto contenido en X.

(c) De la definición de interior es fácil inferir que si $A \subseteq B$, entonces $\overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{B}$. Pues bien, debido a ello tenemos que

$$A \cap B \subseteq A \text{ y } A \cap B \subseteq B \Rightarrow (A \cap B)^{\circ} \subseteq \overset{\circ}{A} \text{ y } (A \cap B)^{\circ} \subseteq \overset{\circ}{B}$$

Por lo tanto

$$(A \cap B)^{\circ} \subseteq \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}.$$

Por otra parte tenemos que

$$\overset{\circ}{A} \subseteq A \text{ y } \overset{\circ}{B} \subseteq B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subseteq A \cap B$$

y como tanto $\overset{\circ}{A}$ como $\overset{\circ}{B}$ son abiertos (pues son uniones arbitrarias de abiertos), entonces su intersección es un abierto contenido en $A \cap B$ y, por tanto, parte de la unión de abiertos contenidos en $A \cap B$; o sea

$$\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subseteq (A \cap B)^{\circ}$$

de donde resulta la igualdad que se quiere.

(d) $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$, puesto que $\overset{\circ}{A}$ es el abierto máximo contenido en $\overset{\circ}{A}$.

(e) En forma más general, si A es abierto, entonces es el abierto máximo contenido en A, i.e. $\overset{\circ}{A} = A$. Y si $\overset{\circ}{A} = A$, entonces A es abierto por ser unión de abiertos.

Supongamos ahora que entre los subconjuntos de un conjunto X se establece una asociación que satisfaga las condiciones (a), (b), (c), (d) anteriores. Siendo así, probaremos que la familia de conjuntos que coinciden con sus asociados satisface los axiomas de los abiertos y es, por consiguiente, una topología para X.

(i) Por (a), $\overset{\circ}{\emptyset} \subseteq \emptyset$; por lo tanto es vacío. De esto, y de (b), tenemos: $X, \emptyset \in \tau$.

(ii) Es fácil ver que de las condiciones (a), (b), (c), (d) puede inferirse que $A \subseteq B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{B}$. Utilizaremos esto para probar que τ es cerrada bajo uniones arbitrarias.

Sea $(A_j)_J$ cualquier subfamilia de miembros de τ. Por definición de unión

$$A_j \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j, \forall j \in J$$

de modo que, por la observación que hicimos

$$\overset{\circ}{A_j} \subseteq \overset{\circ}{\bigcup_{j \in J}} A_j, \forall j \in J;$$

y como cada A_j es miembro de τ, entonces $\overset{\circ}{A_j} = A_j, \forall j \in J$.

$$\therefore \ A_j \subseteq \overset{\circ}{\bigcup_{j \in J}} A_j, \forall j \in J;$$

$$\therefore \ \bigcup_{j \in J} A_j \subseteq \overset{\circ}{\bigcup_{j \in J}} A_j$$

Como además, por (a) contamos con la contención en sentido contrario, entonces tenemos la igualdad, que significa que τ es cerrada bajo uniones arbitrarias, como se quería probar.

(iii) Sean A_1 y A_2 miembros arbitrarios de τ; entonces $\overset{\circ}{A_1} = A_1$ y $\overset{\circ}{A_2} = A_2$. De esto y de (c) resulta

$$(A_1 \cap A_2)^{\circ} = A_1 \cap A_2$$

Por lo tanto, $A_1 \cap A_2 \in \tau$, que es lo que se quería probar.

Esto demuestra que τ es una topología para X. Sólo falta probar que $\overset{\circ}{A}$ es el interior de A según τ. Por (a), $\overset{\circ}{A} \subseteq A$, y por (d), $\overset{\circ}{A} \in \tau$. Por lo tanto, $\overset{\circ}{A}$ es un abierto contenido en A. Para probar que es el más grande supongamos que G es otro abierto contenido en A; entonces $G \in \tau$ y $G \subseteq A$. Luego, $\overset{\circ}{G} = G \subseteq \overset{\circ}{A}$, por lo que $\overset{\circ}{A}$ es el interior.@

Junio 7 de 1985.

Ejemplo: Recordemos que en $\mathbb{E}^n$ definimos, para $x \in \mathbb{R}^n$ y $\varepsilon > 0$, el disco de centro en x y radio ε como

$$D_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \rho(x,y) < \varepsilon\}$$

Utilizando nuestra caracterización de cerradura para conjuntos de $\mathbb{E}^n$, probaremos que

$$\overline{D_\varepsilon(x)} = \{y \in \mathbb{R}^n : \rho(x,y) \leq \varepsilon\}$$

demostrando que

$$\{y \in \mathbb{R}^n : \rho(x,y) \leq \varepsilon\} = \{y \in \mathbb{R}^n : \rho(y, D_\varepsilon(x)) = 0\}$$

($\subseteq$) Sea $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $\rho(x,y) \leq \varepsilon$. Es claro que sobre el segmento $\overline{xy}$ siempre es posible hallar un punto $z \neq y$ tan cerca de y como se quiera; como $\rho(x,y) \leq \varepsilon$ y $z \neq y$, entonces $\rho(x,z) < \varepsilon$. Luego, $z \in D_\varepsilon(x)$, y como está arbitrariamente cerca de y, entonces su distancia a y es arbitrariamente pequeña, lo que significa que $\rho(y, D_\varepsilon(x)) = 0$.

($\supseteq$) En esta parte procederemos por reducción al absurdo. Sea $w \in \mathbb{R}^n$ tal que $\rho(w, D_\varepsilon(x)) = 0$ y supongamos que $\rho(x,w) > \varepsilon$; sea $r = \rho(x,w) - \varepsilon$. Veremos que bajo este supuesto la distancia de cualquier punto del disco a w siempre será mayor que r. En efecto, sea $z \in D_\varepsilon(x)$ un punto arbitrario, entonces $\rho(x,z) < \varepsilon$; por la desigualdad del triángulo tenemos

$$\rho(z,w) \geq \rho(x,w) - \rho(x,z) > \rho(x,w) - \varepsilon = r$$

y entonces resulta que la distancia de w al disco no puede ser menos que positiva. Esto es una contradicción con la hipótesis de que la distancia de w al disco es cero. Luego, falso suponer $\rho(x,w) > \varepsilon$; por lo tanto, $\rho(x,w) \leq \varepsilon$, que es a lo que se quería llegar.@

1.5 Frontera de un conjunto

Ya probamos que en cualquier espacio topológico el complemento del interior de cualquier conjunto es igual a la cerradura de su complemento. Tratándose del $D_\varepsilon(x)$, y dando por hecho que $D_\varepsilon^\circ(x) = D_\varepsilon(x)$ (lo cual será enunciado como primer ejercicio del curso), tenemos

$$\overline{\mathbb{R}^n - D_\varepsilon(x)} = \mathbb{R}^n - D_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \rho(x,y) \geq \varepsilon\};$$

En virtud de esto y de lo que acabamos de probar, si hacemos

$$S_\varepsilon(x) = \overline{\mathbb{R}^n - D_\varepsilon(x)} \cap \overline{D_\varepsilon(x)}$$

tendremos que

$$S_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \rho(x,y) = \varepsilon\}$$

que es la esfera de dimensión n o **n-esfera** de centro x y radio ε.

Definición. Sea (X,τ) un espacio topológico arbitrario y sea $A \subseteq X$. Definimos la **frontera de A** como la intersección de la cerradura de A con la cerradura de su complemento. La simbología que suele emplearse para denotar a la frontera de un conjunto A es $Fr(A)$ o ∂A. En lo sucesivo utilizaremos indistintamente estos signos.

Ejemplos de frontera: i). $\partial D_\varepsilon(x) = S_\varepsilon(x)$

ii). En $\mathbb{E}^1$ con la topología usual consideremos al conjunto $\mathbb{Q}$ de números racionales. Sabemos que en torno a cualquier racional existe un irracional tan próximo a él como se quiera, o sea que si $r \in \mathbb{Q}$, entonces

$$\forall \varepsilon > 0 \exists s \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}.\ni.s \in D_\varepsilon(r);$$

dicho de otro modo

$$\forall r \in \mathbb{Q}\ \nexists \varepsilon > 0.\ni.D_\varepsilon(r) \subseteq \mathbb{Q}$$

Por lo tanto, $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$. Análogamente, también es vacío el interior del conjunto de números irracionales, i.e. $(\mathbb{R}-\mathbb{Q})^{\circ} = \emptyset$. En consecuencia, $\mathbb{R} - \overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{R}-\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ y $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Por lo tanto, $Fr\,(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

Primera tanda de ejercicios. 1. Si τ es la topología usual en $\mathbb{E}^n$ probar que, para cualesquiera $x \in \mathbb{R}^n$ y $\varepsilon > 0$, $D_{\varepsilon}\,(x) \in \tau$.

2. Si (X,τ) es un espacio topológico arbitrario, probar que para cualesquiera $A, B \subseteq X$,

$$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$$

¿Es válida la igualdad? Justifique su respuesta.

3. Si $\tau = \{X, \emptyset, A\}$, describa la cerradura y el interior de cualquier subconjunto de X.

4. Si $A \subseteq X$, pruebe que es una topología para X la familia constituida por $\emptyset$ y por todo conjunto que contenga a A. Describa los cerrados, las cerraduras y los interiores. ¿Qué topología resulta si A es vacío? ¿Y si $A = X$?

5. Si B es un subconjunto fijo de X, y para $A \subseteq X$ se define

$$\overline{A} = \begin{cases} \emptyset, & si\ A = \emptyset \\ A \cup B, & si\ A \neq \emptyset \end{cases}$$

pruebe que se satisfacen los axiomas de Kuratowski. Describa los cerrados, los abiertos y las cerraduras.

6. Si (X,τ) es un espacio topológico arbitrario y A es un subconjunto fijo de X, pruebe que

a)

$$\tau' = \{U \cup (V \cap A) \mid U, V \in \tau\}$$

es una topología para X.

b) $\tau \subseteq \tau'$ y $A \in \tau'$.

c) Si τ'' es cualquier topología para X que contenga a τ y a A, entonces $\tau' \subseteq \tau''$.

Junio 10 de 1985.

Proposición. Si (X,τ) es un espacio topológico cualquiera y $A \subseteq X$, entonces:

a) $X - Fr\,(A) = \overset{\circ}{A} \cup (X-A)^{\circ}$

b) $X = \overset{\circ}{A} \cup Fr\,(A) \cup (X-A)^{\circ}$

c) $\overline{A} = A \cup Fr\,(A) = \overset{\circ}{A} \cup Fr\,(A)$

d) $\overset{\circ}{A} = A - Fr\,(A)$

e) A es cerrado$\Leftrightarrow A \supseteq Fr\,(A)$

f) A es abierto$\Leftrightarrow A \cap Fr\,(A) = \emptyset$.

Demostración. a) Por definición

$$Fr\,(A) = \overline{A} \cap \overline{X-A};$$

luego

$$X - Fr\,(A) = \left(X - \overline{A}\right) \cup \left(X - \overline{X-A}\right)$$

y por el lema anterior

$$\left(X - \overline{A}\right) \cup \left(X - \overline{X-A}\right) = (X-A)^{\circ} \cup (X-(X-A))^{\circ} = (X-A)^{\circ} \cup \overset{\circ}{A}$$

b) Por álgebra de conjuntos $X = \Omega \cup (X - \Omega)$, para cualquier $\Omega \subseteq X$. En particular

$$X = Fr\,(A) \cup (X - Fr\,(A))$$

de modo que, por (a), resulta

$$X = \overset{\circ}{A} \cup Fr\,(A) \cup (X-A)^{\circ}$$

c) $\overline{A} \supseteq A \cup Fr\,(A)$ ya que $A \subseteq \overline{A}$ y $Fr\,(A) = \overline{A} \cap \overline{X-A}$. Por otro lado, dado que $\overset{\circ}{A}$, $Fr\,(A)$ y $(X-A)^{\circ}$ son ajenos entre sí y, por (b), complementarios entre los tres, entonces

$$X - (X-A)^{\circ} = \overset{\circ}{A} \cup Fr\,(A)$$

o, lo que es lo mismo

$$X - \left(X - \overline{A}\right) = \overset{\circ}{A} \cup Fr\,(A)$$

de donde

$$\overline{A} = \overset{\circ}{A} \cup Fr\,(A) \subseteq A \cup Fr\,(A)$$

Por lo tanto

$$\overline{A} = \overset{\circ}{A} \cup Fr\,(A) = A \cup Fr\,(A)\,.$$

d)

$$A - Fr\,(A) = A \cap (X - Fr\,(A))$$

de modo que por (a) tenemos

$$A \cap \left(\overset{\circ}{A} \cup (X - A)^{\circ}\right) = \left(A \cap \overset{\circ}{A}\right) \cup \left(A \cap (X - A)^{\circ}\right) = \overset{\circ}{A}$$

e) Si A es cerrado, entonces $A = \overline{A} \supseteq Fr\,(A)$. Por otra parte, si $A \supseteq Fr\,(A)$, entonces, debido a (c), $\overline{A} = A \cup Fr\,(A) = A$, y A resulta cerrado.

f) Si A es abierto, entonces $A = \overset{\circ}{A}$; por (a), $\overset{\circ}{A} \subseteq X - Fr\,(A)$. Luego, $A \cap Fr\,(A) = \emptyset$. Recíprocamente, supongamos que $A \cap Fr\,(A) = \emptyset$. Entonces

$$A = A \cap X = A \cap \left(\overset{\circ}{A} \cup Fr\,(A) \cup (X - A)^{\circ}\right) = \overset{\circ}{A}$$

y A resulta abierto, como se quería probar.@

Ahora veremos que el concepto de frontera es también un concepto básico de la topología.

Teorema. Sean, (X, τ) un espacio topológico y $A, B \subseteq X$, arbitrarios. Entonces:

a) $Fr\,(\emptyset) = \emptyset$

b) $Fr\,(A) = Fr\,(X - A)$

c) $Fr\,(Fr\,(A)) \subseteq Fr\,(A)$

d) $A \cup B \cup Fr\,(A \cup B) = A \cup Fr\,(A) \cup B \cup Fr\,(B)$

Recíprocamente, si en un conjunto X se asocia con cada subconjunto A otro subconjunto ∂A de modo que se satisfagan las condiciones (a), (b), (c), (d), entonces existe una topología para X en la cual ∂A es la frontera de A, para cada $A \subseteq X$.

Demostración. a) De la definición de frontera tenemos

$$Fr\,(\emptyset) = \overline{\emptyset} \cap \overline{X - \emptyset} = \emptyset \cap X = \emptyset$$

b)

$$Fr\,(A) = \overline{A} \cap \overline{X - A} = \overline{X - A} \cap \overline{A} = Fr\,(X - A)$$

c) De acuerdo con la definición tenemos

$$Fr\,(Fr\,(A)) = \overline{Fr\,(A)} \cap \overline{X - Fr\,(A)}$$

que, por (a) de la proposición anterior y porque $Fr\,(A)$ es un cerrado, puede escribirse como

$$\left(\overline{A} \cap \overline{X - A}\right) \cap \overline{\overset{\circ}{A} \cup (X - A)^{\circ}}$$

lo cual a su vez puede expresarse como

$$\left(\overline{A} \cap \overline{X - A} \cap \overline{\overset{\circ}{A}}\right) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{X - A} \cap \overline{(X - A)^{\circ}}\right);$$

y como $\overline{\overset{\circ}{A}} \subseteq \overline{A}$ y $\overline{(X - A)^{\circ}} \subseteq \overline{X - A}$, entonces lo anterior queda como

$$\left(\overline{\overset{\circ}{A}} \cap \overline{X - A}\right) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{(X - A)^{\circ}}\right)$$

o bien, como

$$\left(\overset{\circ}{A}\cap\overline{X-\overset{\circ}{A}}\right)\cup\left(\overline{\overline{A}}\cap\overline{X-\overline{A}}\right)=Fr\left(\overset{\circ}{A}\right)\cup Fr\left(\overline{A}\right)$$

Por consiguiente, si $x\in Fr\left(Fr\left(A\right)\right)$, entonces o$\left\{\begin{smallmatrix} i)\ x\in Fr\left(\overset{\circ}{A}\right)\\ ii)\ x\in Fr\left(\overline{A}\right)\end{smallmatrix}\right.$.

$$\begin{array}{lcl} i)\ \text{Si } x & \in & Fr\left(\overset{\circ}{A}\right),\ \text{entonces } x\in\overline{\overset{\circ}{A}}\subseteq\overline{A}\ \text{y}\ x\in\overline{X-\overset{\circ}{A}}=\overline{X-A};\\ ii)\ \text{Si } x & \in & Fr\left(\overline{A}\right),\ \text{entonces } x\in\overline{\overline{A}}=\overline{A}\ \text{y}\ x\in\overline{X-\overline{A}}\subseteq\overline{X-A}.\end{array}$$

Cualquiera que sea el caso, vemos que $x\in\overline{A}\cap\overline{X-A}$. Por lo tanto, $Fr\left(Fr\left(A\right)\right)\subseteq Fr\left(A\right)$.

d) Por (c) de la proposición anterior y por un lema

$$\left(A\cup B\right)\cup Fr\left(A\cup B\right)=\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}=\left(A\cup Fr\left(A\right)\right)\cup\left(B\cup Fr\left(B\right)\right)$$

Recíprocamente, sea X un conjunto y supongamos que se asocia un subconjunto ∂A con cada $A\subseteq X$, de modo que se satisfagan (a), (b), (c), (d). Siendo así, probaremos que la reasociación de A con el conjunto $A\cup\partial A$ satisface, a su vez, los axiomas de Kuratowski.

En efecto, haciendo $\tilde{A}=A\cup\partial A$, para cada $A\subseteq X$, se tiene que

(a) $A\subseteq\tilde{A}$

(b) $\tilde{\emptyset}=\emptyset$ porque, de acuerdo con (a), $\partial\emptyset=\emptyset$

(c) Debido a (d) tenemos

$$\widetilde{(A\cup B)}=\left(A\cup B\right)\cup\partial\left(A\cup B\right)=A\cup\partial A\cup B\cup\partial B=\tilde{A}\cup\tilde{B}$$

(d) Por (c) y por (d)

$$\tilde{\tilde{A}}=\tilde{A}\cup\partial\tilde{A}=\left(A\cup\partial A\right)\cup\partial\left(A\cup\partial A\right)=\left(A\cup\partial A\right)\cup\left(\partial A\cup\partial\partial A\right)=A\cup\partial A$$

En consecuencia, por el teorema correspondiente a cerraduras, existe una topología para X según la cual $\tilde{A}$ es la cerradura de A. Aplicando (b) y la definición de frontera tenemos que la frontera de A, según esta topología, es

$$\begin{aligned} Fr\left(A\right) &= \tilde{A}\cap\widetilde{(X-A)}=\left(A\cup\partial A\right)\cap\left(X-A\cup\partial\left(X-A\right)\right)\\ &= \left[A\cap\left(X-A\cup\partial\left(X-A\right)\right)\right]\cup\left[\partial A\cap\left(X-A\cup\partial\left(X-A\right)\right)\right]\\ &= \left(A\cap\partial A\right)\cup\left[\left(X-A\right)\cap\partial A\right]\cup\partial A\\ &= \left\{\left[A\cup\left(X-A\right)\right]\cap\partial A\right\}\cup\partial A=\left(X\cap\partial A\right)\cup\partial A=\partial A\end{aligned}$$

y así concluye la prueba del teorema.@

1.6 Vecindades

Definición. Sea (X,τ) un espacio topológico arbitrario y sea $x\in X$. Una **vecindad de x** es cualquier subconjunto de X que contenga a un abierto que a su vez contenga a x. Por $\mathcal{N}_x$ denotaremos a la familia de todas las vecindades de x, y por $\mathcal{N}_x^{\circ}$ a la familia de vecindades abiertas de x.

Ejemplos de vecindades: i) Si τ es la topología discreta para X, entonces tanto $\mathcal{N}_x$ como $\mathcal{N}_x^{\circ}$ coinciden con la familia de todos los subconjuntos de X que contienen a x.

ii) Si τ es la topología indiscreta, entonces $\mathcal{N}_x=\mathcal{N}_x^{\circ}=\{X\}$.

iii) Si $\tau=\{X,A,\emptyset\}$, entonces

$$\mathcal{N}_x=\begin{cases}\{B\subseteq X: B\supseteq A\}, \text{ si } x\in A\\ \{X\}, \text{ si } x\in X-A\end{cases}\quad \text{y}\quad \mathcal{N}_x^{\circ}=\begin{cases}\{X,A\}, \text{ si } x\in A\\ \{X\}, \text{ si } x\notin A\end{cases}$$

TEOREMA. Sea (X,τ) un espacio topológico arbitrario, entonces:
(a) $x \in V$, si $V \in \mathcal{N}_x$.
(b) Si $V_1 \subseteq V_2$ y $V_1 \in \mathcal{N}_x$, entonces $V_2 \in \mathcal{N}_x$.
(c) Si $V_1, V_2 \in \mathcal{N}_x$, entonces $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{N}_x$.
(d) $\forall V \in \mathcal{N}_x \exists W \in \mathcal{N}_x .\ni. V \in \mathcal{N}_y, \forall y \in W$.
(e) $A \in \tau \Leftrightarrow A$ contiene una vecindad de cada uno de sus puntos.

Recíprocamente, si para cada $x \in X$ existe una familia $\mathcal{N}_x$ de subconjuntos de X que satisfaga las condiciones (a), (b), (c), (d) y se define

$$\tau = \{A \subseteq X \mid \forall a \in A \exists V \in \mathcal{N}_a .\ni. V \subseteq A\}$$

entonces τ es una topología para X según la cual $\mathcal{N}_x$ es la familia de vecindades en x.

Demostración: (a) Si $V \in \mathcal{N}_x$, entonces V es un subconjunto de X que contiene a un abierto que contiene a x. Luego $x \in V$.

(b) Supongamos $V_1 \subseteq V_2$, con $V_1 \in \mathcal{N}_x$; entonces existe $A \in \tau$ tal que $x \in A \subseteq V_1$. Luego, existe $A \in \tau$ (la misma) tal que $x \in A \subseteq V_2$; $\therefore V_2 \in \mathcal{N}_x$.

(c) Si $V_1, V_2 \in \mathcal{N}_x$, entonces existen $A_1, A_2 \in \tau$ tales que $x \in A_1 \subseteq V_1$ y $x \in A_2 \subseteq V_2$; luego, $x \in A_1 \cap A_2 \subseteq V_1 \cap V_2$, y como $A_1 \cap A_2 \subseteq \tau$, entonces $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{N}_x$.

(d) Sea $V \in \mathcal{N}_x$, entonces existe $A \in \tau$ tal que $x \in A \subseteq V$; pero entonces $A \in \mathcal{N}_x$. Sea $y \in A$; entonces también $A \in \mathcal{N}_y$, de modo que, por (b), $V \in \mathcal{N}_y$.

(e) Si $A \in \tau$, entonces A contiene una vecindad de cada uno de sus puntos (A misma). Por su parte, si A contiene una vecindad de cada uno de sus puntos, entonces

$$\forall a \in A \exists V_a \in \mathcal{N}_a .\ni. V_a \subseteq A;$$

sea $B_a \in \tau$ tal que $a \in B_a \subseteq V_a$. Entonces

$$A = \bigcup_{a \in A} \{a\} \subseteq \bigcup_{a \in A} B_a \subseteq \bigcup_{a \in A} V_a \subseteq A$$

Por lo tanto, $A = \bigcup_{a \in A} B_a \in \tau$.

Recíprocamente, si X es un conjunto en el que para cada uno de sus puntos se tiene definida una familia de subconjuntos de X que satisface las condiciones anteriores, entonces probaremos que τ definida como la familia de subconjuntos de X que contienen al menos un miembro de la familia asociada a cada uno de sus puntos es una topología para X demostrando que se satisfacen los axiomas de los conjuntos abiertos.

(*i*) $X \in \tau$, ya que si $x \in X$, entonces cualquier $V \in \mathcal{N}_x$ está contenida en X. Por otra parte, observemos que la proposición

$$\forall a \in \emptyset \exists V \in \mathcal{N}_a .\ni. V \subseteq \emptyset$$

no puede ser falsa. Luego, también $\emptyset \in \tau$.

(*ii*) Sea $(A_j)_J \subseteq \tau$ y sea $x \in \bigcup_{j \in J} A_j$; entonces $x \in A_j$ p.a. $j \in J$; por lo tanto existe $V \in \mathcal{N}_x$ tal que $V \subseteq A_j$; luego $V \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j$. Por lo tanto, $\bigcup_{j \in J} A_j \in \tau$.

(*iii*) Sean $A_1, A_2 \in \tau$ y sea $x \in A_1 \cap A_2$; entonces existen $V_1, V_2 \in \mathcal{N}_x$ tales que

$$x \in V_1 \subseteq A_1 \text{ y } x \in V_2 \subseteq A_2$$

Por lo tanto,

$$x \in V_1 \cap V_2 \subseteq A_1 \cap A_2$$

y como, por (c), $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{N}_x$, entonces $A_1 \cap A_2 \in \tau$.

Para finalizar hay que probar que

$$\mathcal{N}_x = \{V \subseteq X \mid \exists U \in \tau .\ni. x \in U \subseteq V\}$$

($\subseteq$) Sea $V \in \mathcal{N}_x$ y definamos

$$U = \{y \in V \mid \exists V_y \in \mathcal{N}_y,\ V_y \subseteq V\}$$

Claramente $U \subseteq V$; además $U \neq \emptyset$ porque, por (a), $x \in V$ y para x existe $V_x \in \mathcal{N}_x$, $V_x \subseteq V$: (a saber, V mismo). Para probar que U pertenece a τ hay que probar que de cada uno de sus puntos hay un miembro de la familia asociada correspondiente enteramente contenido en U. Sea $y \in U$ y sea $V_y \in \mathcal{N}_y$, $V_y \subseteq V$; por (d) existe $W \in \mathcal{N}_y$ tal que si $z \in W$, entonces $V_y \in \mathcal{N}_z$; como $V_y \subseteq V$, entonces z es un elemento de V para el cual existe $V_z \in \mathcal{N}_z$ (a saber, V_y) tal que $V_z \subseteq V$, i.e. $z \in U$; $\therefore W \subseteq U$; $\therefore U \in \tau$. Por lo tanto, V es una vecindad de x según τ.

($\supseteq$) Ahora sea V una vecindad de x según τ. Entonces existe $U \in \tau$ tal que $x \in U \subseteq V$; en consecuencia, de la definición de τ tenemos que existe $A \in \mathcal{N}_x$ tal que $A \subseteq U$. Luego $A \subseteq V$ y, por (b), $V \in \mathcal{N}_x$.

Esto demuestra que bajo esta topología $\mathcal{N}_x$ es la familia de vecindades de x, con lo que el teorema queda demostrado.@

Junio 14 de 1985.

<u>*Ejemplo:*</u> Tomemos a $\mathbb{R}$ como conjunto y para cualquier x en $\mathbb{R}$ consideremos el intervalo $[x, z)$, con $z \in \mathbb{R}$, $z > x$. Definamos ahora

$$\mathcal{N}_x = \{V \subseteq \mathbb{R} : [x, z) \subseteq V, \text{ p.a. } z > x\}$$

Veamos que se satisfacen las condiciones (a), (b), (c), (d) del teorema.

(a) Si $V \in \mathcal{N}_x$, entonces $V \supseteq [x, z) \ni x$; $\therefore x \in V$.

(b) Si $V_1 \subseteq V_2$ y $V_1 \in \mathcal{N}_x$, entonces $[x, z) \subseteq V_1$, p.a. $z > x$; $\therefore [x, z) \subseteq V_2$; $\therefore V_2 \in \mathcal{N}_x$.

(c) Sean $V_1, V_2 \in \mathcal{N}_x$; entonces $V_1 \supseteq [x, z_1)$ y $V_2 \supseteq [x, z_2)$, con $z_1, z_2 > x$. Por consiguiente, si $z = \min\{z_1, z_2\}$, entonces $V_1 \cap V_2 \supseteq [x, z)$. Por lo tanto, $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{N}_x$.

(d) Sea $V \in \mathcal{N}_x$; entonces $[x, z) \subseteq V$, p.a. $z > x$. Por su parte, $[x, z) \in \mathcal{N}_x$ y si $y \in [x, z)$, entonces $[y, z) \subseteq [x, z)$. Luego, $[y, z) \subseteq V$ y $V \in \mathcal{N}_y$.

En consecuencia, la familia

$$\tau = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid \forall a \in A \exists V \in \mathcal{N}_a \cdot \ni . V \subseteq A\}$$

es una topología para $\mathbb{R}$. Además, si τ_0 denota a la topología usual de $\mathbb{R}$, entonces $\tau_0 \subset \tau$.

En efecto, sea $A \in \tau_0$ y sea $a \in A$; entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq A$. Por lo tanto, $[a, a + \varepsilon) \subseteq A$ y $A \in \tau$. Sin embargo, aunque $[a, a + \varepsilon) \in \tau$, $[a, a + \varepsilon) \notin \tau_0$ ya que no existe $\varepsilon > 0$ tal que $D_\varepsilon(a) \subseteq [a, a + \varepsilon)$.

A $\mathbb{R}$ con esta topología se le conoce como la **recta de Sorgenfrey**.

1.7 Vecindades básicas

Definición. En un espacio topológico arbitrario una **base local de vecindades de x** es cualquier subfamilia de $\mathcal{N}_x$ que contenga un miembro dentro de cualquier vecindad de x. En símbolos, $\mathcal{B}_x$ es **base local de x** si, y sólo si,

$$i)\ \mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{N}_x$$
$$ii)\ \forall V \in \mathcal{N}_x \exists B \in \mathcal{B}_x \cdot \ni . B \subseteq V$$

A los miembros de $\mathcal{B}_x$ se les llama vecindades básicas de x.

<u>*Ejemplos:*</u> i) $\mathcal{N}_x$ es un base local en x.

<u>ii) $\mathcal{N}_x^\circ$</u> es una base local en x.

iii) Una base local de x en la recta de Sorgenfrey es

$$\{A \subseteq \mathbb{R} : A = [x, z),\ z > x\}$$

iv) En $\mathbb{E}^n$ una base local de x es

$$\{D_\varepsilon(x) :\ \varepsilon > 0\}$$

v) En $\mathbb{E}^n$ una base local de x es

$$\left\{D_\varepsilon(x) :\ \varepsilon \in \mathbb{Q}^+\right\}$$

Junio 17 de 1985.

Ejercicio: 7. a) Si $\mathcal{B}_x$ es una base local en x, probar que

$$\mathcal{N}_x = \{V \subseteq X \mid \exists B \in \mathcal{B}_x,\ B \subseteq V\}$$

b) Si $\mathcal{B}_x$ es una base local en x y tiene la propiedad

$$B_1 \subseteq B_2 \text{ y } B_1 \in \mathcal{B}_x \Rightarrow B_2 \in \mathcal{B}_x$$

probar que $\mathcal{B}_x$ es $\mathcal{N}_x$.

TEOREMA. Sea (X, τ) un espacio topológico arbitrario. Si $\mathcal{B}_x$ es una base local para cada $x \in X$, entonces

(α) $x \in B$ si $B \in \mathcal{B}_x$.

(β) Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_x$, entonces existe $B_3 \in \mathcal{B}_x$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$

(γ) $\forall B \in \mathcal{B}_x \exists W \in \mathcal{B}_x .\ni . y \in W \Rightarrow \exists B_y \in \mathcal{B}_y .\ni . B_y \subseteq B$.

(δ) $A \in \tau \Leftrightarrow \forall a \in A \exists B \in \mathcal{B}_a .\ni . B \subseteq A$.

Recíprocamente, si para cada $x \in X$ existe una familia $\mathcal{B}_x$ de subconjuntos de X que satisfaga las condiciones (α), (β), (γ) y se define

$$\tau = \{A \subseteq X \mid \forall a \in A \exists B_a \in \mathcal{B}_a,\ B_a \subseteq A\}$$

entonces τ es una topología para X según la cual $\mathcal{B}_x$ es una base local de x.

Nótese la similitud entre este teorema y el anterior; de hecho, resulta equivalente definir τ a través de (δ) que hacerlo a través de (e). En realidad este teorema enuncia una situación más general, de la que el otro es corolario; aquí han sido enunciados en este orden por razones didácticas, pues nos valdremos de aquél para la prueba de éste.

Demostración. (α) Por (a), $x \in B$ porque $B \in \mathcal{N}_x$.

(β) Sean $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_x$; entonces $B_1, B_2 \in \mathcal{N}_x$. Por (c), $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{N}_x$, y como $\mathcal{B}_x$ es una base local, entonces existe $B_3 \in \mathcal{B}_x$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

(γ) Sea $B \in \mathcal{B}_x$; entonces $B \in \mathcal{N}_x$. Por (d), existe $W' \in \mathcal{N}_x$ tal que si $y \in W'$ entonces $B \in \mathcal{N}_y$. Luego, por definición de base local, existen $W \in \mathcal{B}_x$, $W \subseteq W'$ y, para cada $y \in W$, $B_y \in \mathcal{B}_y$, $B_y \subseteq B$, que es a lo que se quería llegar.

(δ) Por (e), si $A \in \tau$, entonces A contiene una vecindad de cada uno de sus puntos, de modo que, por definición de base local, A también contendrá una vecindad básica de cada uno de sus puntos. Viceversa, si A contiene una vecindad básica de cada uno de sus puntos, entonces contiene una vecindad de cada uno de sus puntos y, por lo tanto, $A \in \tau$.

En la parte que sigue comencemos verificando que τ satisface los axiomas de los conjuntos abiertos.

(i) $X \in \tau$ ya que para cuelquier $x \in X$ y para cualquier $B \in \mathcal{B}_x$, B está contenida en X. Por otra parte, también $\emptyset \in \tau$ ya que la proposición

$$\forall x \in \emptyset \exists B \in \mathcal{B}_x .\ni . B \subseteq \emptyset$$

jamás puede ser falsa.

(ii) Sea $(A_j)_J \subseteq \tau$ y sea $x \in \bigcup_{j \in J} A_j$; entonces $x \in A_j$, p.a. $j \in J$. Por lo tanto existe $B \in \mathcal{B}_x$, $B \subseteq A_j$; $\therefore B \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j$; $\therefore \bigcup_{j \in J} A_j \in \tau$.

(iii) Sean $A_1, A_2 \in \tau$ y sea $x \in A_1 \cap A_2$; entonces existen $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_x$, $B_1 \subseteq A_1$, $B_2 \subseteq A_2$. Por (β), existe $B_3 \in \mathcal{B}_x$, $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$; $\therefore B_3 \subseteq A_1 \cap A_2$; $\therefore A_1 \cap A_2 \in \tau$.

Esto prueba que τ es una topología para X. Nótese que si ahora demostramos que la familia

$$\mathcal{N}_x = \{V \subseteq X \mid \exists B \in \mathcal{B}_x,\ B \subseteq V\}$$

es una familia de vecindades en x, entonces habremos demostrado que $\mathcal{B}_x$ es una base local en x, pues claramente es una subfamilia de $\mathcal{N}_x$ con un miembro contenido en cada miembro de $\mathcal{N}_x$. Para probar que efectivamente es $\mathcal{N}_x$ una familia de vecindades en x hay que verificar que se satisfacen las condiciones (a), (b), (c), (d) del teorema anterior pues, según ese teorema, esto basta para que $\mathcal{N}_x$ sea la familia de vecindades en x.

(a) Si $V \in \mathcal{N}_x$, entonces existe $B \in \mathcal{B}_x$, $B \subseteq V$. Por (α), $x \in B$; $\therefore x \in V$.

(b) Si $V_1 \subseteq V_2$ y $V_1 \in \mathcal{N}_x$, entonces existe $B_1 \in \mathcal{B}_x$, $B_1 \subseteq V_1$. Luego, $B_1 \subseteq V_2$; $\therefore V_2 \in \mathcal{N}_x$.

(c) Si $V_1, V_2 \in \mathcal{N}_x$, entonces existen $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_x$, $B_1 \subseteq V_1$ y $B_2 \subseteq V_2$; $\therefore B_1 \cap B_2 \subseteq V_1 \cap V_2$. Por (β) existe $B_3 \in \mathcal{B}_3$, $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Luego, $B_3 \subseteq V_1 \cap V_2$; $\therefore V_1 \cap V_2 \in \mathcal{N}_x$.

(d) Sea $V \in \mathcal{N}_x$ y sea $B \in \mathcal{B}_x$, $B \subseteq V$. Por (γ), existe $W \in \mathcal{B}_x$ tal que

$$\forall y \in W \exists B_y \in \mathcal{B}_y . \ni . B_y \subseteq B$$

Entonces $W \in \mathcal{N}_x$ y $B_y \subseteq V$, por lo que $V \in \mathcal{N}_y$, $\forall y \in W$.

Así finaliza la demostración del teorema.@

Junio 19 de 1985

Ejercicios: 8. Demuestre que en $\mathbb{E}^n$, para todo punto x, la familia

$$\left\{ \overline{D_{\frac{1}{k}}(x)} : k \in \mathbb{N} \right\}$$

es una base local en x.

9. Sea (X, τ) un espacio topológico arbitrario. Si $A \subseteq X$, pruebe que $\partial A = \emptyset \Leftrightarrow A$ es abierto y cerrado.

Ejemplo: Sea $X = \mathbb{R}^2$ y consideremos el conjunto

$$R_1 = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0 \right\}$$

Para $x \in \mathbb{R}^2$ definimos:

$$i) \text{ Si } x = (x_1, 0), \text{ entonces } \mathcal{B}_x = \left\{ \overline{D_r(a)} : r > 0,\ a = (x_1, r) \right\}$$

$$ii) \text{ Si } x \notin R_1, \text{ entonces } \mathcal{B}_x = \left\{ \overline{D_{\frac{1}{n}}(x)} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Veamos que se satisfacen las condiciones (α), (β) y (γ) del teorema anterior.

(α) Sea $B \in \mathcal{B}_x$;

$$i) \text{ Si } x \in R_1, \text{ entonces } B = \overline{D_r(a)} \text{ y } \rho(x, a) = r;\ \therefore x \in B.$$

$$ii) \text{ Si } x \notin R_1, \text{ entonces } B = \overline{D_{\frac{1}{n}}(x)} \text{ y } x \in B.$$

(β) Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_x$, es fácil ver que en cualquier caso $B_3 = B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}_x$, pues siempre resulta ser el disco de radio menor.

(γ) Hay que ver que

$$\forall B \in \mathcal{B}_x \exists W \in \mathcal{B}_x . \ni . \forall y \in W \exists B_y \in \mathcal{B}_y . \ni . B_y \subseteq B$$

Sea $B \in \mathcal{B}_x$ y sea W cualquier elemento de $\mathcal{B}_x$ de radio menor que el radio de B. Sea $y \in W$;

$$i) \text{ Si } x \in R_1 \text{ y } \begin{cases} x = y, \text{ entonces } W \in \mathcal{B}_y \text{ y } W \subseteq B; \\ x \neq y, \text{ entonces } \exists n \in \mathbb{N} . \ni . \overline{D_{\frac{1}{n}}(y)} \subseteq B \end{cases}$$

$$ii) \text{ Si } x \notin R_1, \text{ es posible hallar } n \text{ suficientemente grande de modo que}$$

$$\overline{D_{\frac{1}{n}}(y)} \subseteq B.$$

En consecuencia, la familia

$$\tau = \left\{ A \subseteq \mathbb{R}^2 \mid \forall a \in A \exists B_a \in \mathcal{B}_a . \ni . B_a \subseteq A \right\}$$

es una topología para $\mathbb{R}^2$. Además, si denotamos por τ_0 a la topología usual de $\mathbb{R}^2$, entonces $\tau_0 \subset \tau$.

En efecto, si $A \in \tau_0$ y $a \in A$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $D_\varepsilon(a) \subseteq A$.

$i)$ Si $a \in R_1$, es posible hallar $B_a \in \mathcal{B}_a$, de radio suficientemente pequeño, de modo que

$$B_a \subseteq D_\varepsilon(a)$$

$$ii) \text{ Si } a \notin R_1, \text{ escogiendo } n > \frac{1}{\varepsilon} \text{ tendremos } \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ y } \overline{D_{\frac{1}{n}}(a)} \subseteq D_\varepsilon(a).$$

En ambos casos termina habiendo un miembro de $\mathcal{B}_a$ dentro de A y, por lo tanto, $A \in \tau$. Sin embargo, si $x \in R_1$ y $B \in \mathcal{B}_x$, entonces $A = \{x\} \cup (B - \partial B)$ es un abierto según τ pero no lo es según τ_0.

Junio 21 de 1985

A continuación estableceremos caracterizaciones de los conceptos básicos ya estudiados a través del concepto de base local.

Proposición. Sea (X,τ) un espacio topológico arbitrario. Si $\mathcal{B}_x$ es una base local en x, entonces:
a) A es abierto $\Leftrightarrow \forall a \in A \exists B \in \mathcal{B}_a,\ B \subseteq A$
b) C es cerrado $\Leftrightarrow \forall x \notin C \exists B \in \mathcal{B}_x \cdot \ni . B \cap C = \emptyset$
c) $\overset{\circ}{A} = \{a \in A \mid \exists B \in \mathcal{B}_a \cdot \ni . B \subseteq A\}$
d) $\overline{A} = \{x \in X \mid B \in \mathcal{B}_x \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset\}$
e) $\partial A = \{x \in X : B \in \mathcal{B}_x \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset \text{ y } (X-A) \cap B \neq \emptyset\}$

Demostración. a) Es el inciso (δ) del teorema anterior.

b) $(\Rightarrow)$ Si C es cerrado y $x \notin C$, entonces $X - C$ es abierto y $x \in X - C$; por (a), existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \subseteq X - C$. Por lo tanto, existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \cap C = \emptyset$.

$(\Leftarrow)$ Si para todo $x \notin C$ existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \cap C = \emptyset$, entonces para todo $x \in X - C$ existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \subseteq X - C$ lo que, según (a), significa que $X - C$ es abierto y, por lo tanto, C es cerrado.

c) $(\subseteq)$ Sea $a \in \overset{\circ}{A}$; dado que $\overset{\circ}{A} \in \mathcal{N}_a$, existe $B \in \mathcal{B}_a$ tal que $B \subseteq \overset{\circ}{A}$. Luego, $B \subseteq A$.

$(\supseteq)$ Sea $a \in A$, y supongamos que existe $B \in \mathcal{B}_a$, $B \subseteq A$. Por definición de vecindad, existe un abierto U tal que $a \in U \subseteq B$. Luego, U es un abierto contenido en A; $\therefore U \subseteq \overset{\circ}{A}$; $\therefore a \in \overset{\circ}{A}$.

d) Como $X - \overline{A} = (X-A)^\circ$, entonces $\overline{A} = X - (X-A)^\circ$.

$(\subseteq)$ Sea $x \in \overline{A}$; entonces $x \notin (X-A)^\circ$. Luego, debido a (c), $B \not\subseteq X - A, \forall B \in \mathcal{B}_x$. Por lo tanto, $A \cap B \neq \emptyset$, $\forall B \in \mathcal{B}_x$.

$(\supseteq)$ Sea $x \in X$ tal que $A \cap B \neq \emptyset, \forall B \in \mathcal{B}_x$; por (c), $x \notin (X-A)^\circ$. Por lo tanto, $x \in \overline{A}$.

e) Recordemos que $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X-A}$.

$(\subseteq)$ Sea $x \in \partial A$ y sea $B \in \mathcal{B}_x$. Luego, debido a (d), $A \cap B \neq \emptyset$ y $(X-A) \cap B \neq \emptyset$, porque $x \in \overline{A}$ y $x \in \overline{X-A}$.

$(\supseteq)$ Sea $x \in X$ tal que $\forall B \in \mathcal{B}_x$, $A \cap B \neq \emptyset$ y $(X-A) \cap B \neq \emptyset$.Entonces, debido a (d), $x \in \overline{A}$ y $x \in \overline{X-A}$, i.e. $x \in \partial A$.@

Def. Sean τ_1 y τ_2 dos topologías para un mismo conjunto X; se dice que $\boldsymbol{\tau_2}$ **es más fina que** $\boldsymbol{\tau_1}$ o bien que $\boldsymbol{\tau_1}$ **es menos fina que** $\boldsymbol{\tau_2}$ cuando $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

Ejercicio: 10. Sean τ_1 y τ_2 dos topologías para X y sean $\mathcal{B}_x^1$ y $\mathcal{B}_x^2$ bases locales en x según τ_1 y τ_2, respectivamente, $\forall x \in X$. Probar que son equivalentes:
a) τ_1 es menos fina que τ_2
b) $\forall B_1 \in \mathcal{B}_x^1 \exists B_2 \in \mathcal{B}_x^2,\ B_1 \subseteq B_2$

1.8 Puntos de acumulación

Junio 24 de 1985

Definición. Sea (X,τ) un espacio topológico arbitrario y sea $A \subseteq X$.

(a) Un punto $x \in X$ se llama **punto de acumulación de A** si toda vecindad de x contiene algún punto de A distinto de x; i.e. $A \cap (V - \{x\}) \neq \emptyset, \forall V \in \mathcal{N}_x$

(b) El conjunto de puntos de acumulación de A se denota por A' y se llama **conjunto derivado de A.**

Lema. Si $\mathcal{B}_x$ es una base local en x, entonces

$$x \in A' \Leftrightarrow A \cap (B - \{x\}) \neq \emptyset, \forall B \in \mathcal{B}_x$$

Demostración: $\Rightarrow$) Si $x \in A'$, entonces $A \cap (V - \{x\}) \neq \emptyset$, para toda vecindad de x y, en particular, para toda vecindad básica.

$\Leftarrow$) Sea $V \in \mathcal{N}_x$; entonces existe $B \in \mathcal{B}_x$, $B \subseteq V$. Luego

$$A \cap (B - \{x\}) \subseteq A \cap (V - \{x\})$$

y como por hipótesis el primer miembro de esta contención no es vacío, entonces tampoco lo es el segundo, lo que significa, dado que V es cualquier vecindad, que $x \in A'$como se quería probar.@

<u>Ejemplos:</u> 1) Sea $X = \mathbb{E}$ y sea $A = \mathbb{Q}$; entonces

$$x \in \mathbb{Q}' \Leftrightarrow \mathbb{Q} \cap (D_\varepsilon(x) - \{x\}) \neq \emptyset, \forall \varepsilon > 0;$$

y como esto ocurre para todo número real x, $\mathbb{Q}' = \mathbb{E}$. Análogamente, $(\mathbb{R} - \mathbb{Q})' = \mathbb{E}$.

2) Sean, $X = \mathbb{E}^n$, $A = D_\varepsilon(x)$ y $y \in \mathbb{E}^n$. Recordemos que

$$\mathcal{B}_y = \{D_r(y) : r > 0\}$$

es una base local en y; siendo así, tenemos que

$$y \in D'_\varepsilon(x) \Leftrightarrow D_\varepsilon(x) \cap (B - \{y\}) \neq \emptyset, \forall B \in \mathcal{B}_y$$

Para averiguar qué puntos del espacio son puntos de acumulación del disco tengamos en cuenta que $\mathbb{E}^n$ se reparte entre

$$D^\circ_\varepsilon(x), \partial D_\varepsilon(x) \text{ y } (\mathbb{E}^n - D_\varepsilon(x))^\circ$$

Analizaremos separadamente estos conjuntos.

(i) Por el ejercicio 1 sabemos que $D^\circ_\varepsilon(x) = D_\varepsilon(x)$. Sea $y \in D_\varepsilon(x)$ y sea $B \in \mathcal{B}_y$. Como $D_\varepsilon(x)$ es abierto, existe otro disco de centro en y y radio positivo enteramente contenido en $D_\varepsilon(x)$; este otro disco es un miembro de $\mathcal{B}_y$ que intersecta a $D_\varepsilon(x)$ en más de un punto. Luego, cualquier otro disco que tenga centro en y y radio mayor que el del disco ya contenido intersectará a $D_\varepsilon(x)$ en más de un punto; por su parte, los discos que tengan radio menor también intersectarán a $D_\varepsilon(x)$ en más de un punto ya que r jamás llega a ser cero. Así, ya sea B de radio mayor, menor o igual al radio del disco contenido en $D_\varepsilon(x)$, este argumento prueba que

$$D_\varepsilon(x) \cap (B - \{y\}) \neq \emptyset$$

Por lo tanto, $D_\varepsilon(x) \subseteq D'_\varepsilon(x)$.

(ii) Por (e) de la proposición anterior tenemos que si $y \in \partial D_\varepsilon(x)$, entonces

$$D_\varepsilon(x) \cap B \neq \emptyset \text{ y } (\mathbb{E}^n - D_\varepsilon(x)) \cap B \neq \emptyset, \forall B \in \mathcal{B}_y$$

y como B intersecta a $D_\varepsilon(x)$ en más de un punto, entonces

$$D_\varepsilon(x) \cap (B - \{y\}) \neq \emptyset$$

Por lo tanto, $\partial D_\varepsilon(x) \subseteq D'_\varepsilon(x)$.

(iii) Si $y \in (\mathbb{E}^n - D_\varepsilon(x))^\circ$, podemos ver que es posible hallar una vecindad básica B de radio suficientemente pequeño de modo que $B \cap D_\varepsilon(x) = \emptyset$. Por lo tanto, $y \notin D'_\varepsilon(x)$.

Por consiguiente, $D'_\varepsilon(x) = \overline{D_\varepsilon(x)}$.

3) Sean, $X = \mathbb{E}$, $A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ y $x \in \mathbb{R}$.

(i) Si $x < 0$, entonces

$$A \cap D_{|x|}(x) = \emptyset$$

Por lo tanto, $x \notin A'$.

(ii) Si $x > 0$ y $x \in A$, entonces $x = \frac{1}{n}$, p.a. $n \in \mathbb{N}$. Escogiendo ε de tal modo que

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} - \varepsilon \quad \text{y} \quad \frac{1}{n} + \varepsilon < \frac{1}{n-1}$$

tendremos

$$A \cap D_\varepsilon(x) = \{x\}$$

Luego

$$A \cap (D_\varepsilon(x) - \{x\}) = \emptyset$$

Por lo tanto, $x \notin A'$.

(iii) Si $x > 0$ y $x \notin A$, entonces

$$A \cap D_{\rho(x,A)}(x) = \emptyset$$

Por lo tanto, $x \notin A'$.

(iv) Si $x = 0$, entonces

$$A \cap D_\varepsilon(x) \neq \emptyset, \forall \varepsilon > 0.$$

Por lo tanto, $A' = \{0\}$.

4) Si $X = \mathbb{E}^n$ y A es finito, entonces

$$\{\rho(x,a) : a \in A\} \text{ es finito, } \forall x \in \mathbb{E}^n$$

Sea $x \in \mathbb{E}^n$ arbitrario y sea

$$m = \min\{\rho(x,a) : a \in A - \{x\}\}$$

Entonces $m > 0$ y tenemos

$$A \cap (D_m(x) - \{x\}) = \emptyset$$

Por lo tanto, $A' = \emptyset$.

5) Si $X = \mathbb{E}$ y $A = \mathbb{Z}$, entonces

$$A \cap \left(D_{\rho(x,\mathbb{Z}-\{x\})}(x) - \{x\}\right) = \emptyset, \forall x \in \mathbb{E}$$

Por lo tanto, $\mathbb{Z}' = \emptyset$.

En la prueba del siguiente lema nos valdremos de los resultados de la proposición anterior.

Lema. Sea (X,τ) un espacio topológico cualquiera y $A \subseteq X$; entonces:

(a) A es cerrado $\Leftrightarrow A' \subseteq A$

(b) $\overline{A} = A \cup A'$

Demostración: $\Rightarrow$) Sabemos que si A es cerrado y $x \notin A$, entonces

$$\exists B \in \mathcal{B}_x \cdot\ni . A \cap B = \emptyset$$

y, por consiguiente, x no puede ser punto de acumulación de A. En consecuencia tenemos que cuando A es cerrado

$$x \notin A \Rightarrow x \notin A'$$

o lo que es lo mismo

$$x \in A' \Rightarrow x \in A$$

Por lo tanto, $A' \subseteq A$.

$\Leftarrow$) Si $A' \subseteq A$ y $x \notin A$, entonces x no puede ser punto de acumulación de A, por lo que

$$\exists B \in \mathcal{B}_x \cdot\ni . A \cap (B - \{x\}) = \emptyset$$

y como $x \notin A$, entonces también $A \cap B = \emptyset$, de donde resulta que A es cerrado.

$\subseteq$) Sea $x \in \overline{A}$; entonces

$$A \cap B \neq \emptyset, \forall B \in \mathcal{B}_x$$

Ahora bien, $\begin{cases} \text{si } A \cap (B - \{x\}) \neq \emptyset, \text{ entonces } x \in A' \\ \text{si } A \cap (B - \{x\}) = \emptyset, \text{ entonces } x \in A \end{cases}$; en ambos casos resulta $x \in A \cup A'$.

$\supseteq$) Sea $x \in A \cup A'$; entonces $x \in A$ o $x \in A'$.

$$\begin{aligned} i) \text{ Si } x &\in A, \text{ entonces } x \in \overline{A} \text{ ya que } A \subseteq \overline{A}. \\ ii) \text{ Si } x &\in A', \text{ entonces } A \cap B \neq \emptyset, \text{ ya que } A \cap (B - \{x\}) \neq \emptyset, \forall B \in \mathcal{B}_x \end{aligned}$$

En ambos casos $x \in \overline{A}$, tal como se quería probar.@

En la parte que sigue inicia la discusión referente al concepto de espacio producto o producto topológico.

El producto topológico de una familia $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ de espacios topológicos es un espacio topológico cuyo conjunto subyacente es el producto cartesiano de la familia $(X_\lambda)_\Lambda$. La topología de que se encuentra dotado este espacio no es arbitraria; más al contrario, es una topología muy singular e importante a la que se llega mediante la manipulación adecuada de las topologías τ_λ de los espacios factores que itervienen en el producto.

Su importancia radica en que las múltiples propiedades que posee enriquecen enórmemente la teoría. De tales propiedades daremos cuenta una vez construido el concepto.

Para su construcción comenzaremos primeramente analizando los resultados referentes a la manipulación de topologías aludida arriba. En segundo lugar haremos un estudio breve de subespacios topológicos y topologías relativas para proveernos de conocimientos que nos serán útiles en la construcción. Como tercer paso revisaremos el concepto de función e introduciremos el concepto de "función" que nos dará la pauta para arribar a la forma más general del concepto de producto cartesiano; de este concepto haremos un estudio comparativo con relación a sus formas más simples que haga ver las ventajas que tiene sobre éstas. Mostraremos también que existe una propiedad universal que caracteriza al producto cartesiano y la haremos extensiva una vez sentado el concepto de producto topológico. El cuarto paso consistirá en presentar formalmente el espacio producto, procediendo luego con el estudio de sus propiedades.

Continuaremos la vez próxima.

2

Generación de una Topología; bases y subbases.

Miércoles 26 de junio de 1985.

TEOREMA. Sea X cualquier conjunto. Si $(\tau_i)_I$ es una familia de topologías para X y $\tau = \bigcap_{i \in I} \tau_i$, entonces τ es una topología para X.

Demostración: (i) $X, \emptyset \in \tau$, porque $X, \emptyset \in \tau_i, \forall i \in I$.

(ii) Sea $(A_j)_J \subseteq \tau$; entonces

$$A_j \in \tau_i, \forall j \in J, i \in I.$$

Luego

$$\bigcup_{j \in J} A_j \in \tau_i, \forall i \in I.$$

Por lo tanto, $\bigcup_{j \in J} A_j \in \tau$.

(iii) Sean $A_1, A_2 \in \tau$; entonces

$$A_1, A_2 \in \tau_i, \forall i \in I.$$

Luego

$$A_1 \cap A_2 \in \tau_i, \forall i \in I.$$

Por lo tanto, $A_1 \cap A_2 \in \tau$.@

Definición. Sea γ cualquier familia de subconjuntos de X, i.e. $\gamma \subseteq \mathtt{Pot}(X)$; si $(\tau_i)_I$ es la familia de topologías que contienen a γ, entonces $\tau(\gamma) = \bigcap_{i \in I} \tau_i$ es la **topología generada por** γ.

Proposición. a) $\gamma \subseteq \tau(\gamma)$

b) Si γ es una topología, entonces $\tau(\gamma) = \gamma$

c) Si $\gamma \subseteq \gamma'$, entonces $\tau(\gamma) \subseteq \tau(\gamma')$

Demostración: a) De acuerdo con la definición,

$$\gamma \subseteq \tau_i, \forall i \in I$$

Luego, $\gamma \subseteq \bigcap_{i \in I} \tau_i$; i.e. $\gamma \subseteq \tau(\gamma)$.

b) Si γ es una topología, entonces $\gamma = \tau_i$, p.a. $i \in I$; por lo tanto, $\bigcap_{i \in I} \tau_i = \gamma$, i.e. $\tau(\gamma) = \gamma$.

c) Supongamos que $\gamma \subseteq \gamma'$; por (a), $\gamma' \subseteq \tau(\gamma')$. Luego, $\tau(\gamma')$ es una de las topologías que contienen a γ y, por tanto, contendrá a la intersección de todas ellas; es decir, $\tau(\gamma) \subseteq \tau(\gamma')$.@

Ejemplos: 1) Sea X un conjunto arbitrario y sea

$$\gamma = \{\{x\} : x \in X\}$$

Entonces $\tau(\gamma)$ es la topología discreta ya que, por (a),

$$\{x\} \in \tau(\gamma), \forall x \in X$$

y si $A \subseteq X$, entonces

$$A = \bigcup_{a \in A} \{a\} \in \tau(\gamma).$$

Además, si $\gamma \subseteq \gamma'$, entonces, debido a (c), $\tau(\gamma) \subseteq \tau(\gamma')$ y, por tanto, $\tau(\gamma')$ también es la topología discreta.

2) Sea γ la familia vacía de subconjuntos de X. Por vacuidad $\gamma \subseteq \{X, \emptyset\}$; entonces, por (b) y (c)

$$\tau(\gamma) \subseteq \tau(\{X, \emptyset\}) = \{X, \emptyset\}$$

En consecuencia, $\tau(\gamma) = \{X, \emptyset\}$; es decir, $\tau(\gamma)$ es la topología indiscreta.

3) Sea $A \subseteq X$ y $\gamma = \{A\}$. Por (a), $A \in \tau(\gamma)$; luego

$$\{X, A, \emptyset\} \subseteq \tau(\gamma)$$

Pero $\{X, A, \emptyset\}$ es una topología que además contiene a γ. En consecuencia

$$\tau(\gamma) = \{X, A, \emptyset\}$$

4) Sean, τ una topología para X, $A \subseteq X$ y $\gamma = \tau \cup \{A\}$. Como $\tau \subseteq \gamma$ y $\{A\} \subseteq \gamma$, entonces

$$\tau \subseteq \tau(\gamma) \text{ y } A \in \tau(\gamma)$$

Por el ejercicio 6 sabemos que la topología más chica que contiene a τ y a A es

$$\tau' = \{U \cup (V \cap A) \mid U, V \in \tau\}$$

Luego, $\tau' \subseteq \tau(\gamma)$. Pero $\tau \subseteq \tau'$ y $A \in \tau'$, es decir, $\gamma \subseteq \tau'$. Por lo tanto, $\tau(\gamma) = \tau'$. A esta topología se le llama **extensión simple de τ correspondiente a A.**

Def. Se dice que $\mathcal{L} = \{K_\alpha : \alpha \in J\}$ es *cerrado bajo la formación de intersecciones finitas* si para todo subconjunto finito F de J se tiene $\bigcap\limits_{\alpha \in F} K_\alpha \in \mathcal{L}$.

Lema. Sea $\gamma \subseteq \texttt{Pot}(X)$; si γ es cerrada bajo la formación de intersecciones finitas, entonces $\tau(\gamma)$ es la familia de uniones arbitrarias de elementos de γ.

Demostración. Sea δ la familia de uniones arbitrarias de elementos de γ. Obsérvese que $\gamma \subseteq \delta$, porque si $A \in \gamma$, entonces $A = A \cup A \in \delta$. Por otra parte, al ser $\tau(\gamma)$ una topología y $\gamma \subseteq \tau(\gamma)$, entonces toda unión arbitraria de elementos de γ será un miembro de $\tau(\gamma)$. Por lo tanto,

$$\gamma \subseteq \delta \subseteq \tau(\gamma)$$

De aquí que si δ fuera una topología, entonces no le quedaría más remedio que ser $\tau(\gamma)$. Veamos que así acontece.

(i) Sea γ_0 la familia vacía de subconjuntos de X. Por vacuidad, $\gamma_0 \subseteq \gamma$, y como γ_0 es finita, de la hipótesis se sigue que $\cap\gamma_0 \in \gamma$. Ahora bien, γ_0 puede visualizarse como la familia $(A_i)_I$, con $I = \emptyset$. Por consiguiente

$$\cap\gamma_0 = \{x \in X \mid i \in I \Rightarrow x \in A_i\}$$

El antecedente $i \in I$ de la proposición que condiciona la pertenencia a este conjunto es falso (porque I es vacío), y se sabe que al ser falso el antecedente de una proposición, no importa qué sea el consecuente, la proposición es verdadera. En consecuencia, todo punto del espacio satisface esta condición de pertenencia y, por lo tanto, $\cap\gamma_0 = X$. Así, $X \in \delta$.

Por otro lado, como δ es la familia de uniones arbitrarias de elementos de γ y como γ_0 es la familia vacía de elementos de γ, entonces no cabe duda de que $\cup\gamma_0$ es una unión de elementos de γ y, por lo tanto, $\cup\gamma_0 \in \delta$. Ahora bien, hablando en términos conjuntistas, es obvio que la implicación siguiente siempre es verdadera:

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow \exists i \in I .\ni . x \in A_i$$

y sigue siéndolo aun cuando I sea vacío. Sin embargo, en este caso su consecuente es falso y se sabe que sólo es posible concluir algo falso mediante una proposición verdadera si su antecedente también es falso. Por lo tanto, siendo I vacío, decir que x es elemento de la $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ es decir algo falso; pero no sería falso si esta unión contuviese algún elemento. Como tiene que ser falso, entonces esta unión no puede contener elemento alguno y, por lo tanto, es vacía. Así, $\cup\gamma_0 = \emptyset$ y $\emptyset \in \delta$.

(ii) Sea $(A_i)_I \subseteq \delta$; entonces

$$A_i = \bigcup_{j \in J_i} A_{ij}, \text{ con } A_{ij} \in \gamma, \forall j \in J_i, i \in I$$

Por lo tanto,

$$\underset{i\in I}{\cup} A_i = \underset{i\in I}{\cup}\underset{j\in J_i}{\cup} A_{ij} = \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J_i}} A_{ij}$$

lo cual, según se ve, es una unión de elmentos de γ. Por lo tanto, $\underset{i\in I}{\cup} A_i \in \delta$.

(iii) Sean $A, B \in \delta$; entonces

$$A = \underset{i\in I}{\cup} A_i, \text{ con } A_i \in \gamma, \forall i \in I \text{ y } B = \underset{j\in J}{\cup} B_j, \text{ con } B_j \in \gamma, \forall j \in J$$

Por lo tanto

$$A \cap B = \left(\underset{i\in I}{\cup} A_i\right) \cap \left(\underset{j\in J}{\cup} B_j\right) = \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} (A_i \cap B_j)$$

la cual es también una unión de elementos de γ ya que, por hipótesis, γ es cerrada bajo intersecciones finitas. Por lo tanto, $A \cap B \in \delta$.

Esto prueba que δ es una topología para X y, por lo tanto, que $\tau(\gamma) = \delta$.@

2.1 Bases y abiertos básicos

Julio 15 de 1985.

Si γ es cualquier familia de subconjuntos de X, $\beta(\gamma)$ denotará a la familia de intersecciones finitas de elementos de γ.

Segunda tanda de ejercicios. 1. Sea $\gamma \subseteq \mathtt{Pot}(X)$;

a) Probar que $\beta(\gamma)$es cerrada bajo la formación de intersecciones finitas; es decir, que

$$\beta(\beta(\gamma)) = \beta(\gamma)$$

b) Suponiendo que γ es tal que

i) $\forall x \in X \exists G \in \gamma .\ni. x \in G$

ii) $G_1, G_2 \in \gamma$ y $x \in G_1 \cap G_2 \Rightarrow \exists G_3 \in \gamma .\ni. x \in G_3 \subseteq G_1 \cap G_2$

probar que cada elemento de $\beta(\gamma)$ es unión de elementos de γ.

Obs. Si $\gamma \subseteq \mathtt{Pot}(X)$, entonces

i) $X \in \beta(\gamma)$ porque X es la intersección de la familia vacía de elementos de γ, que es finita.

ii) $\gamma \subseteq \beta(\gamma)$ porque cada elemento G de γ puede visualizarse como una intersección finita de un solo intersectando: G.

En el lema anterior se dio la descripción de $\tau(\gamma)$ cuando γ es cerrada bajo la formación de intersecciones finitas. En seguida daremos la descripción completa de $\tau(\gamma)$.

Teorema. Si γ es cualquier familia de subconjuntos de X, entonces $\tau(\gamma)$ es la familia de uniones arbitrarias de elementos de $\beta(\gamma)$, es decir, $\tau(\gamma)$ es la familia de uniones arbitrarias de intersecciones finitas de elementos de γ.

Demostración. Tenemos

$$\gamma \subseteq \beta(\gamma) \Rightarrow \tau(\gamma) \subseteq \tau(\beta(\gamma))$$

Pero también

$$\beta(\gamma) \subseteq \tau(\gamma) \Rightarrow \tau(\beta(\gamma)) \subseteq \tau(\gamma)$$

Por consiguiente

$$\tau(\gamma) = \tau(\beta(\gamma))$$

Ahora bien, por (a) del ejercicio anterior, $\beta(\gamma)$ es cerrada bajo la formación de intersecciones finitas, de modo que, aplicando el lema, tenemos que $\tau(\beta(\gamma))$ es la familia de uniones arbitrarias de elementos de $\beta(\gamma)$ y, por lo tanto, $\tau(\gamma)$ es la familia de uniones arbitrarias de intersecciones finitas de elementos de γ.@

Definición. Sea (X, τ) cualquier espacio topológico. Una **base de** τ es una familia $\beta \subseteq \tau$ tal que todo elemento de τ es unión de elementos de β. Llamaremos **abiertos básicos** a los miembros de β.

LEMA. Sea $\beta \subseteq \tau$; entonces β es una base de τ si, y sólo si,

$$\forall A \in \tau \text{ y } \forall a \in A \exists B \in \beta . \ni . a \in B \subseteq A.$$

Demostración: $\Rightarrow$) Sea $A \in \tau$ y sea $a \in A$; por ser β una base de τ

$$A = \bigcup_{j \in J} B_j, \text{ con } B_j \in \beta, \forall j \in J$$

Luego, $a \in B_j$, p.a. $j \in J$, y claramente $B_j \subseteq A$.

$\Leftarrow$) Sea $A \in \tau$ y sea $a \in A$; por hipótesis existe $B_a \in \beta$ tal que $a \in B_a \subseteq A$. Luego,

$$\{a\} \subseteq B_a \subseteq A, \forall a \in A$$

de donde

$$\bigcup_{a \in A} \{a\} \subseteq \bigcup_{a \in A} B_a \subseteq A$$

Por lo tanto, $A = \bigcup_{a \in A} B_a$. Por lo tanto, β es una base de τ.@

Ejemplos: 1) τ es base de τ

2) En $\mathbb{E}^n$ la familia de discos abiertos $D_\varepsilon(x)$ es una base de la topología usual.

3) Otra base de la topología usual de $\mathbb{E}^n$ es

$$\left\{ D_{\frac{1}{k}}(x) : x \in \mathbb{Q}^n \text{ y } k \in \mathbb{N} \right\}$$

4) $\beta(\gamma)$ es base de $\tau(\gamma)$, para cualquier $\gamma \subseteq \mathtt{Pot}(X)$.

TEOREMA. Sea (X, τ) un espacio topológico cualquiera. Si β es base de τ, entonces

(a) $\forall x \in X \exists B \in \beta . \ni . x \in B$

(b) $B_1, B_2 \in \beta$ y $x \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists B_3 \in \beta . \ni . x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$

Recíprocamente, si β es una familia de subconjuntos de X que satisface las condiciones anteriores, entonces existe una topología para X de la cual β es base.

Demostración. Supongamos que β es base de τ.

(a) Aplicando el lema anterior al caso particular en que A es igual a X hallamos que, efectivamente, para cada punto del espacio existe un abierto básico que lo contiene como elemento.

(b) Por otro lado, como β es una subfamilia de los abiertos de X, entonces la intersección de cualesquiera dos miembros de β, digamos B_1 y B_2, produce otro abierto de X. Si además esta intersección no es vacía entonces, aplicando el lema al caso en que $A = B_1 \cap B_2$, tenemos que para cualquier $x \in B_1 \cap B_2$ existe $B_3 \in \beta$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Recíprocamente, supongamos que $\beta \subseteq \mathtt{Pot}(X)$ satisface las condiciones (a) y (b).

Por el teorema anterior sabemos que $\tau(\beta)$ es la familia de uniones arbitrarias de elementos de $\beta(\beta)$; pero como β satisface (a) y (b), todo elemento de $\beta(\beta)$ es unión de elementos de β (véase (b) del ejercicio 1). Por lo tanto también todo elemento de $\tau(\beta)$ es unión de elementos de β, lo cual quiere decir que β es base de $\tau(\beta)$.@

Julio 17 de 1985.

El siguiente resultado relaciona el concepto de base con el de base local.

Proposición. Sea (X, τ) un espacio topológico arbitrario y sea $\beta \subseteq \tau$. Entonces, β es base de τ si, y sólo si, para cada punto x en X

$$\beta_x = \{B \in \beta : x \in B\}$$

es una base local.

Demostración. ($\Rightarrow$) Como a β_x la forman abiertos que contienen a x, entonces $\beta_x \subseteq \mathcal{N}_x$.

Por otra parte, si $V \in \mathcal{N}_x$, entonces existe un abierto A tal que $x \in A \subseteq V$; y como β es base de τ, entonces existe $B \in \beta$ tal que $x \in B \subseteq A$. Por lo tanto, existe $B \in \beta_x$ tal que $B \subseteq V$. Esto prueba que β_x es una base local de vecindades en x.

($\Leftarrow$) Sea $A \in \tau$ y sea $a \in A$; entonces $A \in \mathcal{N}_a$ y como β_a es una base local de vecindades de a, existe $B \in \beta_a$ tal que $a \in B \subseteq A$. De acuerdo al lema anterior, esto basta para asegurar que β es una base de τ, con lo cual la proposición queda demostrada.@

Ejercicio: 2. Sea (X, τ) un espacio topológico cualquiera. Si $\beta \subseteq \beta' \subseteq \tau$ y β es una base de τ, probar que también β' es una base de τ.

Definición. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $\gamma \subseteq \tau$. Si $\beta(\gamma)$ es base de τ diremos que γ es una **subbase de** τ y llamaremos **abiertos subbásicos** a los elementos de γ.

Ejemplos: 1) En $\mathbb{E}$ una subbase de la topología usual es la familia de intervalos

$$\gamma = \{(a, \infty), (-\infty, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

Las intersecciones finitas relevantes de elementos de γ son:
$(a, \infty) \cap (a', \infty) = (a'', \infty)$, con $a'' = \max\{a, a'\}$
$(-\infty, b) \cap (-\infty, b') = (-\infty, b'')$, con $b'' = \min\{b, b'\}$
$(-\infty, b) \cap (a, \infty) = (a, b)$, con $(a, b) = \emptyset$ si $a > b$.

Por consiguiente, $\beta(\gamma)$ está formada por abiertos usuales y contiene a la base de los discos abiertos que en $\mathbb{E}$ son intervalos de longitud positiva; si denotamos por β a esta base y por τ a la topología usual, tenemos

$$\beta \subseteq \beta(\gamma) \subseteq \tau$$

de modo que, por el ejercicio anterior, $\beta(\gamma)$ es una base de τ y por lo tanto γ es una subbase.@

2) γ es subbase de $\tau(\gamma)$, para cualquier $\gamma \subseteq \mathtt{Pot}(X)$.

Julio 19 de 1985.

En seguida veremos que el sistema de axiomas que define al concepto de conjunto abierto puede ser reducido a dos axiomas sin que esta noción se vea menoscabada o alterada

Proposición. Sea X un conjunto arbitrario y sea τ una familia arbitraria de subconjuntos de X. Entonces, τ es una topología para X si, y sólo si,
(I) τ es cerrada bajo la formación de intersecciones finitas.
(II) τ es cerrada bajo la formación de uniones arbitrarias.

Demostración: $(\Rightarrow)$ Supongamos que τ es una topología para X.

(I) Por el tercer axioma de los abiertos sabemos que la intersección de cualesquiera dos miembros de τ es miembro de τ. Más aún, mediante un sencillo argumento inductivo es fácil extender este resultado y asegurar que la intersección de cualesquiera n elementos de τ es también un elemento de τ. En cuanto a la intersección de la familia vacía de abiertos (que también es una intersección finita) ya sabemos que es igual a X que, por el primer axioma de abiertos, también pertenece a τ. Esto demuestra que τ es cerrada bajo la formación de intersecciones finitas.

(II) τ también es cerrada bajo la formación de uniones arbitrarias pues eso es precisamente lo que significa el segundo axioma de los abiertos.

$(\Leftarrow)$Supongamos ahora que τ es una familia de subconjuntos de X que satisface las condiciones (I) y (II) anteriores. Probaremos que τ es una topología verificando que satisface los axiomas de los conjuntos abiertos.

(i) Sea τ_0 la familia vacía de elementos de τ; entonces $\tau_0 \subseteq \tau$. Por (I) y (II), tanto $\cup\tau_0$ como $\cap\tau_0$ son miembros de τ; y como

$$\cap\tau_0 = X \quad y \quad \cup\tau_0 = \emptyset$$

entonces $X, \emptyset \in \tau$.

(ii) Para cualquier conjunto de índices J (incluso vacío), la unión de la subfamilia $(A_j)_J \subseteq \tau$ es un miembro de τ, según se indica en (II).

(iii) De acuerdo con (I), la intersección de cualquier familia finita de elementos de τ es elemento de τ; en particular, la intersección de cualquier par de miembros suyos es también otro de sus miembros.

Por lo tanto, τ es una topología para X, con lo que la proposición queda demostrada.@

3

Relativización.

Julio 24 de 1985.

Nos valdremos de la proposición anterior para demostrar la que sigue.

Proposición. Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Entonces la familia

$$\tau \mid A = \{A \cap U : U \in \tau\}$$

es una topología para A.

Demostración. Sea $(A \cap U_i)_I \subseteq \tau \mid A$, con $U_i \in \tau, \forall i \in I$; entonces

$$\bigcup_{i \in I} (A \cap U_i) = A \cap \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) \in \tau \mid A$$

Por lo tanto, $\tau \mid A$ es cerrada bajo la formación de uniones arbitrarias.

Por otro lado, suponiendo que I es finito, tenemos que también

$$\bigcap_{i \in I} (A \cap U_i) = A \cap \left(\bigcap_{i \in I} U_i \right) \in \tau \mid A$$

Por lo tanto, $\tau \mid A$ es cerrada bajo la formación de intersecciones finitas.

En vista de la proposición anterior, esto demuestra que, efectivamente, $\tau \mid A$ es una topología para A, que es lo que se quería.@

Definición. Sean, (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Llamaremos **topología inducida por τ en A** a la topología $\tau \mid A$ descrita en la proposición anterior y nos referiremos a la pareja $(A, \tau \mid A)$ como a un **subespacio topológico** de (X, τ). Los abiertos de $\tau \mid A$ se llaman **abiertos en A** o **abiertos relativos**. Para evitar equívocos y no confundir los abiertos del espacio con los de algún subespacio, llamaremos **abiertos absolutos** a los elementos de τ cuando lo creamos necesario.

Ejemplos: 1) Si τ es la topología discreta, entonces $\tau \mid A$ es la topología discreta en A; i.e. todo espacio discreto induce subespacios discretos.

2) Si τ es la topología indiscreta, entonces $\tau \mid A$ es la topología indiscreta de A; i.e. todo espacio indiscreto induce subespacios indiscretos.

3) Sea $\tau = \{X, A, \emptyset\}$ y sea $B \subseteq X$; entonces

$$\tau \mid B = \begin{cases} \{B, \emptyset\}, \text{ si } B \subseteq A \text{ ó } B \subseteq X - A \\ \{B, A \cap B, \emptyset\}, \text{ si } A \cap B \neq \emptyset \text{ y } (X - A) \cap B \neq \emptyset \end{cases}$$

El resultado que sigue establece la descripción de los conceptos básicos en subespacios topológicos.

Teorema. Sean, (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$; entonces

(a) $B \subseteq A$ es abierto en $A \Leftrightarrow B = A \cap U$, p.a. $U \in \tau$.

(b) $C \subseteq A$ es cerrado en $A \Leftrightarrow C = A \cap D$, con D cerrado absoluto.

(c) Para $x \in A$, toda familia relativa de vecindades de x, $\mathcal{N}_{x,A}$, es de la forma

$$\{A \cap V : V \in \mathcal{N}_x\}$$

(d) Si $\mathcal{B}_x$ es una base local en $x \in A$, entonces

$$\mathcal{B}_{x,A} = \{A \cap B : B \in \mathcal{B}_x\}$$

es una base local relativa en x.

(e) Si β es una base de τ, entonces
$$\beta_A = \{A \cap B : B \in \beta\}$$
es una base de $\tau \mid A$.

(f) Si $B \subseteq A$ y $x \in A$, entonces x es punto de acumulación de B en A si, y sólo si, x es punto de acumulación de B en X.

(g) Sea $C \subseteq A$; si denotamos por $\overline{C}^A$ a la cerradura relativa de C, entonces $\overline{C}^A = A \cap \overline{C}$.

Julio 26 de 1985.

Demostración. (a) B es abierto en $A \Leftrightarrow B \in \tau \mid A \Leftrightarrow B = A \cap U$, p.a. $U \in \tau$.

(b) Por (a), C es cerrado en $A \Leftrightarrow A - C$ es abierto en $A \Leftrightarrow A - C = A \cap U$, p.a. $U \in \tau$. Para despejar C de esta ecuación tomemos los complementos absolutos de ambos miembros e intersectémoslos con A. Al tomar los complementos tenemos
$$X - (A - C) = (X - A) \cup C = X - (A \cap C) = (X - A) \cup (X - U)$$
e intersectando con A:
$$A \cap [(X - A) \cup C] = A \cap [(X - A) \cup (X - U)] = A \cap (X - U)$$
y como $C \subseteq A$ y $U \in \tau$, entonces, haciendo $D = X - U$, tenemos que D es un cerrado absoluto y que $C = A \cap D$.

(c) Sea W una vecindad relativa de x en A, entonces W es un subconjunto de A que contiene un abierto relativo que contiene a x; i.e. para alguna $U \in \tau$ se tiene que $x \in A \cap U \subseteq W$. Siendo así, es claro que $x \in U \subseteq W \cup U$, lo que significa que $W \cup U \in \mathcal{N}_x$. Luego
$$A \cap (W \cup U) = (A \cap W) \cup (A \cap U) = W \cup (A \cap U) = W$$
Por lo tanto W es la intersección de A con una vecindad absoluta.

Recíprocamente, si $V \in \mathcal{N}_x$, entonces $x \in U \subseteq V$, p.a. $U \in \tau$ y como $x \in A$, entonces
$$x \in A \cap U \subseteq A \cap V$$
lo que significa que $A \cap V \in \mathcal{N}_{x,A}$.

Esto demuestra que $\mathcal{N}_{x,A} = \{A \cap V : V \in \mathcal{N}_x\}$.

(d) Sea $A \cap V \in \mathcal{N}_{x,A}$; por (c), $V \in \mathcal{N}_x$; por lo tanto existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \subseteq V$. Luego, $A \cap B \subseteq A \cap V$; por lo tanto $\mathcal{B}_x$ es una base local relativa en x.

(e) Por (a), $A \cap B \in \tau \mid A$, para cada $B \in \beta$. Sea $A \cap U \in \tau \mid A$, donde $U \in \tau$. Entonces
$$U = \bigcup_{i \in I} B_i, \text{ con } B_i \in \beta, \forall i \in I$$
Por lo tanto
$$A \cap U = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)$$
con lo que β_A resulta ser base de $\tau \mid A$. (¿Será válida la proposición en sentido contrario?)

(f) Supongamos que x es punto de acumulación de B en A. Sea $V \in \mathcal{N}_x$; entonces
$$B \cap [(A \cap V) - \{x\}] \neq \emptyset$$
y como $B \subseteq A$, entonces
$$B \cap (V - \{x\}) \neq \emptyset$$
lo que significa que x es punto de acumulación de B en X.

Recíprocamente, si x es punto de acumulación de B en X, como
$$B \cap (V - \{x\}) = B \cap [(A \cap V) - \{x\}]$$

entonces, al no ser vacío el primer miembro, tampoco lo es el segundo y por lo tanto x también es punto de acumulación de B en A.

(g) Hay que probar que $\overline{C}^A = A \cap \overline{C}$.

$\subseteq$) Por (b), $A \cap \overline{C}$ es un cerrado en A que contiene a C. Luego, $\overline{C}^A \subseteq A \cap \overline{C}$.

$\supseteq$) Sea $x \in A \cap \overline{C}$ y sea $A \cap V \in \mathcal{N}_{x.A}$, donde $V \in \mathcal{N}_x$. Como $C \subseteq A$, tenemos

$$C \cap (A \cap V) = (C \cap A) \cap V = C \cap V \neq \emptyset$$

lo que significa que $x \in \overline{C}^A$.@

Ejercicio: 3. Sea $B \subseteq A$; probar que

i) B abierto absoluto $\Rightarrow B$ abierto relativo

ii) B cerrado absoluto $\Rightarrow B$ cerrado relativo.

Continuaremos la vez próxima.

Lunes 29 de julio de 1985.

En la clase del día 26 hubo la duda de si el inciso (e) podría presentarse como:

$\beta_A \subseteq \tau \mid A$ es base de $\tau \mid A$ si, y sólo si, existe una base β de τ tal que

$$\beta_A = \{A \cap B : B \in \beta\}$$

Lo que veremos a continuación es el ejemplo de una base relativa para la cual no existe base absoluta que satisfaga la igualdad anterior.

Sea $X = \{x_1, x_2\}$ y sea τ la topología discreta de X. Obsérvese que toda base β de τ contiene tanto a $\{x_1\}$ como a $\{x_2\}$, ya que, por ejemplo, si $\{x_1\} \notin \beta$, entonces $\{x_1\}$ no sería unión de elementos de β; y lo mismo para $\{x_2\}$. Ahora bién, sea $A = \{x_1\}$ y sea $\beta_A = \{A\}$; entonces β_A es base de $\tau \mid A = \{A, \emptyset\}$. Y si β es cualquier base de τ, entonces

$$\emptyset \in \{A \cap B : B \in \beta\}, \text{ pues } \{x_1\} \cap \{x_2\} = \emptyset$$

Como $\emptyset \notin \beta_A$, entonces en este caso la igualdad de arriba jamás se verifica, y esto es lo que se quería demostrar.@

Del teorema anterior se desprenden algunos resultados menores.

Corolario. Sean, (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Entonces:

a) Si A es abierto absoluto, entonces todo abierto en A es abierto absoluto.

b) Si A es cerrado absoluto, entonces todo cerrado en A es cerrado absoluto.

c) Si $B \subseteq A$, entonces $int_A B \supseteq intB$, coincidiendo cuando A es abierto en X.

d) $Int_A B = A \cap int\left[(X - A) \cup B\right]$

e) $\partial_A B = A \cap \left(\overline{B} \cap \overline{A - B}\right) \subseteq A \cap \partial B$, coincidiendo cuando A es abierto en X.

Demostración. a) Por (a), todo abierto en A es de la forma $A \cap U$, con $U \in \tau$. Por eso, si $A \in \tau$, entonces también $A \cap U \in \tau$.

b) Por (b), todo cerrado en A es de la forma $A \cap D$, con D cerrado absoluto. De aquí que si A es un cerrado absoluto, entonces también $A \cap D$ es un cerrado absoluto.

c) $IntB$ es un abierto absoluto contenido en B, y como $B \subseteq A$, resulta que también $intB$ es un abierto en A contenido en B. Luego, $intB \subseteq int_A B$. (Más adelante veremos que la contención puede ser propia). Por otra parte, si A es abierto, entonces, debido a (a), también $int_A B$ es un abierto absoluto contenido en B y, por consiguiente, $int_A B \subseteq intB$. Por lo tanto, si A es abierto, entonces $int_A B = intB$.

d) Se sabe que en cualquier espacio topológico el interior de un conjunto es el complemento de la cerradura de su complemento. En particular, en $(A, \tau \mid A)$ tenemos que

$$\begin{aligned} int_A B &= A - \overline{A - B}^A = A - \left[A \cap \overline{A - B}\right] = A \cap \left(X - \overline{A - B}\right) \\ &= A \cap int\left[X - (A - B)\right] = A \cap int\left[(X - A) \cup B\right] \end{aligned}$$

[1]

[1]¿Es cierto que $int_A B = A \cap intB$?

e) Por (g) y por definición de frontera tenemos

$$\partial_A B = \overline{B}^A \cap \overline{A-B}^A = A \cap \overline{B} \cap \overline{A-B}$$

y como $\overline{A-B} \subseteq \overline{X-B}$ entonces

$$\partial_A B \subseteq A \cap \overline{B} \cap \overline{X-B} = A \cap \partial B$$

Supongamos además que A es abierto;

$$\overline{X-B} \subseteq \overline{(X-A)} \cup \overline{(A-B)} = (X-A) \cup \overline{A-B}$$

Luego

$$A \cap \overline{B} \cap \overline{X-B} \subseteq A \cap \overline{B} \cap \left[(X-A) \cup \overline{A-B}\right] = A \cap \overline{B} \cap \overline{A-B}$$

y por lo tanto $\partial_A B = A \cap \partial B$.@

Observación. Tanto en (c) como en (e) las inclusiones pueden ser propias.

En efecto, pensemos, por ejemplo, en Q y en $\mathbb{E}$.

c) Ya sabemos que intQ$= \emptyset$, pero $int_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q} = \mathbb{Q}$. Por lo tanto, $int_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q} \neq int\mathbb{Q}$.

e) También sabemos que $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{E}$, por lo que $\mathbb{Q} \cap \partial\mathbb{Q} = \mathbb{Q}$; y como $\partial_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q} = \emptyset$...

Ejercicio: 4. Sea (X, τ) un espacio topológico cualquiera y sea $A \subseteq X$. Se sabe que

$$\tau' = \{U \cup (V \cap A) : U, V \in \tau\}$$

es la topología generada por $\tau \cup \{A\}$. Probar que $\tau \mid A = \tau' \mid A$.

4

Repaso del Concepto de Función y Producto Cartesiano

Julio 31 de 1985.

Definición. Una **función** es una terna (A, f, B) en la que A y B son conjuntos tales que $B \neq \emptyset$ si $A \neq \emptyset$. Si $A \neq \emptyset$, entonces f es una regla que asocia un elemento de B, y solamente uno, a cada elemento de A. Si $A = \emptyset$ y B arbitrario, entonces f es la pareja (A, B).

Ya es tarde; continuaremos la vez próxima.

4.1 Secciones y Retracciones en Set

Viernes 2 de agosto de 1985.

Si (A, f, B) es una función, entonces:

a) Los conjuntos A y B se llaman **dominio** y **codominio de la función**, respectivamente. Cuando no se encuentran explícitos en el contexto, podemos referirnos a ellos escribiendo *dom* f y *cod* f.

b) El elemento asociado al elemento a de A por medio de f se denota por $f(a)$ y se llama **valor de la función en a.**

c) El conjunto de valores de la función

$$\{f(a) : a \in A\}$$

se llama **imagen de la función.**

d) Otras notaciones para la función (A, f, B) son: $f : A \to B$, $A \xrightarrow{f} B$ o simplemente f.

e) Si $A' \subseteq A$, entonces la **imagen de A' bajo la función** es el conjunto

$$\{f(a) : a \in A'\}$$

y se denota por $f(A')$.

f) La **identidad en A** es la función (A, f, A) tal que $f(a) = a, \forall a \in A$. Se denota por 1_A o id_A.

g) La **igualdad** de dos funciones (A, f, B) y (A', g, B') ocurre si, y solamente si, $A = A'$, $B = B'$ y $f(a) = g(a), \forall a \in A$.

h) Si se tienen las funciones $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, la **composición de f con g** es la función

$$gf : A \to C \ tal\ que\ gf(a) = g(f(a)), \forall a \in A.$$

i) Si $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$ y $f(A') \subseteq B'$ entonces la **restricción de** f : A → B **a A' y B'** es la función

$$f\,|_{A'}^{B'} : A' \to B' \text{ tal que } f\,|_{A'}^{B'}(a) = f(a), \forall a \in A'$$

Si $A' = A$, en vez de $f\,|_A^{B'}$ se escribe $f\,|^{B'}$. Si $B' = B$, entonces se escribe $f \mid A'$ en lugar de $f\,|_{A'}^{B}$.

j) Sea $f : A \to B$ una función arbitraria. Se dice que f es **inyectiva** cuando de la igualdad $f(a) = f(a')$ se sigue que $a = a'$. Se dice que f es **suprayectiva** si $f(A) = B$. Finalmente, se dice que f es **biyectiva** si es simultáneamente inyectiva y suprayectiva.

k) Una función $r : A \to B$ se llama **retracción en Set** si existe una función $s : B \to A$ tal que la composición $rs = 1_B$. En tal caso s recibe el nombre de **sección en Set.**

Ejemplo: Si X es un conjunto arbitrario, una familia de subconjuntos de X viene dada por una función

$$\varphi : \Lambda \to \texttt{Pot}\,(X)$$

en la cual Λ es un conjunto de índices. Para cada $\lambda \in \Lambda$, $\varphi(\lambda) \subseteq X$, y si hacemos $A_\lambda = \varphi(\lambda)$, entonces $\varphi(\Lambda) = (A_\lambda)_\Lambda$. Si $\Lambda = \emptyset$, entonces φ representa la familia vacía de subconjuntos de X.

Agosto 5 de 1985.

Ejercicio: 5. (a) Sea A un conjunto arbitrario. Probar que
a_1) si *cod* $f = A$, entonces $1_A f = f$
a_2) si *dom* $f = A$, entonces $f 1_A = f$
Además, 1_A es la única función $\varphi : A \to A$ que satisface estas condiciones.
(b) Una función $f : A \to B$ es **constante** si la cardinalidad de $f(A) \leq 1$. Demuestre que son equivalentes:
b_1) f es constante
b_2) Para dos funciones cualesquiera $g, h : C \to A$ se tiene que $fg = fh$.
(c) Sea $f : A \to B$ cualquier función; si $(A_\lambda)_\Lambda$ es cualquier familia de subconjuntos de A, pruebe que:
c_1) $f\left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$
c_2) $f\left(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \subseteq \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$
Dé un ejemplo en el cual se muestre que la contención anterior puede ser propia.
(d) Si $f : A \to B$ es una función arbitraria y $B' \subseteq B$, entonces la **imagen inversa de** B' **bajo f** es el conjunto

$$\{a \in A : f(a) \in B'\}$$

que se denota por $f^{-1}(B')$. Si $(B_\lambda)_\Lambda$ es cualquier familia de subconjuntos de B, probar que:
d_1) $f^{-1}\left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right) = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$
d_2) $f^{-1}\left(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right) = \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$.

4.2 Producto Cartesiano

A partir de esta definición, en lo sucesivo distinguiremos entre una función y una "función".

Definición. Una **"función"** (entre comillas) es una pareja (A, f), donde A es un conjunto arbitrario. Si $A \neq \emptyset$ entonces f es una regla que asocia a cada elemento de A un elemento de algún conjunto. Si $A = \emptyset$, entonces f es la pareja (A, A).

Si (A, f) es una "función", entonces:

(a) El elemento asociado al elemento a de A por medio de f se denota por $f(a)$ y se llama **valor de la "función" en a.**

(b) Si $A' \subseteq A$, entonces la **imagen de A' bajo la "función"** es el conjunto

$$\{f(a) : a \in A'\}$$

que también denotaremos como $f(A')$.

(c) Si (A, f) y (B, g) son dos "funciones" tales que $f(A) \subseteq B$, entonces (A, gf) es la "función" tal que $gf(a) = g(f(a))$.

Definición. Sea X un conjunto arbitrario. Si $(X_\lambda)_\Lambda$ es una familia cualquiera de subconjuntos de X, entonces el **producto cartesiano** de $(X_\lambda)_\Lambda$, al que denotaremos como $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, es el conjunto de todas las "funciones" (Λ, f) tales que si $\lambda \in \Lambda$ entonces $f(\lambda) \in X_\lambda$. En tal caso, llamaremos **λ-ésima coordenada de (Λ,f)** al valor de esta "función" en λ.

Ejemplos: 1) Consideremos el caso en que $\Lambda = \emptyset$.

De acuerdo con la definición de "función", en este caso f es la pareja (Λ, Λ) y tenemos que

$$(\Lambda, f) = (\Lambda, (\Lambda, \Lambda))$$

por lo que el producto cartesiano resulta un conjunto de un sólo elemento, a saber:

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = \{(\emptyset, (\emptyset, \emptyset))\}$$

2) Si consideramos dos conjuntos arbitrarios A_1 y A_2, entonces $\Lambda = \{1, 2\}$ y podemos establecer una correspondencia biunívoca entre el producto cartesiano $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ y el conjunto de parejas ordenadas

$$\{(a_1, a_2) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\}$$

volviéndose indistinguibles uno del otro. (En conformidad con la teoría de los conjuntos, sólo la cardinalidad hace distinguible a un conjunto de otro conjunto).

Por otra parte, si A_1, por ejemplo, es vacío, entonces la proposición

$$\lambda \in \Lambda \Rightarrow f(\lambda) \in A_\lambda$$

tiene consecuente falso para $\lambda = 1$. Esto hace imposible la existencia de "funciones" (Λ, f) que satisfagan esa proposición y, por lo tanto, $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \emptyset$. En general, si $\Lambda \neq \emptyset$ pero $X_\lambda = \emptyset$, p.a. $\lambda \in \Lambda$, entonces $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = \emptyset$.

3) Si $\Lambda = \{1, 2, ..., n\}$, entonces $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ es biyectable con

$$\{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in X_i, \forall i \in \Lambda\}$$

Definición. Sean, X un conjunto y $(X_\lambda)_\Lambda$ una familia de subconjuntos de X. Si $\Lambda \neq \emptyset$, entonces la $\lambda-$**"proyección"** es la "función" $\left(\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, P_\lambda\right)$ tal que $P_\lambda(\Lambda, f) = f(\lambda)$. (Para no cargar mucho la notación escribiremos $P_\lambda(f)$ en lugar de $P_\lambda(\Lambda, f)$.)

La $\lambda-$**proyección** (sin comillas) es la función (también sin comillas)

$$P_\lambda : \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \to X_\lambda \text{ tal que } P_\lambda(f) = f(\lambda).$$

Ejemplo: 4) Sea $\Lambda = \{1, 2\}$ y supongamos que $A_1 = \{a, b, c\}$ y $A_2 = \{c, d\}$. Enumeremos los elementos del producto cartesiano; tenemos:

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \left\{ \begin{array}{c} (\Lambda, f_1);\ f_1(1) = a,\ f_1(2) = c \\ (\Lambda, f_2);\ f_2(1) = a,\ f_2(2) = d \\ (\Lambda, f_3);\ f_3(1) = b,\ f_3(2) = c \\ (\Lambda, f_4);\ f_4(1) = b,\ f_4(2) = d \\ (\Lambda, f_5);\ f_5(1) = c,\ f_5(2) = c \\ (\Lambda, f_6);\ f_6(1) = c,\ f_6(2) = d \end{array} \right\}$$

Hagamos ahora

$$W = \{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, c), (c, d)\}$$

y definamos

$$q_\lambda : W \to A_\lambda \text{ como } q_\lambda(a_1, a_2) = a_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda$$

Finalmente, definiendo

$$\varphi : \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \to W$$

como

$$\begin{aligned} \varphi(f_1) &= (a, c), \varphi(f_2) = (a, d), \varphi(f_3) = (b, c), \\ \varphi(f_4) &= (b, d), \varphi(f_5) = (c, c), \varphi(f_6) = (c, d) \end{aligned}$$

obtenemos una biyección entre el producto cartesiano y el conjunto de parejas ordenadas.

Nótese que al componer q_λ con φ obtenemos la λ-proyección P_λ. Por ejemplo:

$$q_1\varphi(f_4) = q_1(\varphi(f_4)) = q_1(b,d) = b = P_1(f_4);$$

o, por ejemplo

$$q_2\varphi(f_4) = q_2(\varphi(f_4)) = q_2(b,d) = d = P_2(f_4).$$

El nombre de λ-proyección deriva de la interpretación geométrica que esta función tiene. Por ejemplo, suponiendo que en el caso anterior A_1 y A_2 son subconjuntos de $\mathbb{R}$, entonces con $P_1(f_4)$ obtenemos al punto b como proyección sobre el eje x, y con $P_2(f_4)$ obtenemos al punto d como proyección sobre el eje y.

Veamos algunas propiedades del producto cartesiano.

Proposición. Sean $(X_\lambda)_\Lambda$ y $(A_\lambda)_\Lambda$ dos familias de subconjuntos de X tales que $A_\lambda \subseteq X_\lambda, \forall\lambda \in \Lambda$. Entonces $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \subseteq \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$.

Demostración. Sea $(\Lambda, f) \in \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$; de acuerdo con la definición de producto cartesiano,

$$f(\lambda) \in A_\lambda, \forall\lambda \in \Lambda; \therefore f(\lambda) \in X_\lambda, \forall\lambda \in \Lambda; \therefore (\Lambda, f) \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda.@$$

Proposición. a) Sea $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ el producto cartesiano de la familia $(X_\lambda)_\Lambda$; entonces los elementos (Λ, f) y (Λ, g) del producto cartesiano son iguales si, y sólo si, $P_\lambda(f) = P_\lambda(g), \forall\lambda \in \Lambda$.

b) Si M es un conjunto arbitrario, entonces dos funciones

$$h, k : M \to \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

son iguales si, y sólo si, $P_\lambda h = P_\lambda k, \forall\lambda \in \Lambda$.

Demostración. a) $(\Lambda, f) = (\Lambda, g) \Leftrightarrow f(\lambda) = g(\lambda), \forall\lambda \in \Lambda \Leftrightarrow P_\lambda(f) = P_\lambda(g), \forall\lambda \in \Lambda$.

b) Es claro que si $h = k$, entonces $P_\lambda h = P_\lambda k, \forall\lambda \in \Lambda$.

Recíprocamente, supongamos que $P_\lambda h = P_\lambda k, \forall\lambda \in \Lambda$. Tomemos $m \in M$ arbitrario; entonces al considerar las λ-"proyecciones" de los elementos $h(m)$ y $k(m)$ del producto cartesiano tenemos

$$P_\lambda(h(m)) = P_\lambda h(m) = P_\lambda k(m) = P_\lambda(k(m))$$

de modo que, aplicando (a), resulta $h(m) = k(m)$ y, por lo tanto, $h = k$.@

4.3 Propiedad Universal del Producto Cartesiano

Agosto 9 de 1985.

<u>TEOREMA.</u> Sea $(X_\lambda)_\Lambda$ una familia arbitraria de subconjuntos de X. Si

$$(g_\lambda : Z \to X_\lambda)_\Lambda$$

es una familia cualquiera de funciones con dominio común Z, entonces existe una función, y sólo una,

$$g : Z \to \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

tal que $P_\lambda g = g_\lambda, \forall\lambda \in \Lambda$.

<u>*Demostración de la existencia.*</u> Para cada $z \in Z$ existe una regla f_z que asocia a cada λ un elemento de X_λ, a saber: $f_z(\lambda) = g_\lambda(z)$. Sea $g : Z \to \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ la función tal que $g(z) = (\Lambda, f_z)$. Entonces

$$P_\lambda g(z) = P_\lambda(\Lambda, f_z) = f_z(\lambda) = g_\lambda(z); \therefore P_\lambda g = g_\lambda, \forall\lambda \in \Lambda$$

Demostración de la unicidad. Supongamos que $g' : Z \to \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ es cualquier función tal que $P_\lambda g' = g_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda$. Entonces $P_\lambda g' = P_\lambda g, \forall \lambda \in \Lambda$, de modo que, por el inciso (b) de la proposición anterior se tiene $g' = g$, con lo cual el teorema queda demostrado.@

Definición. Sea $(X_\lambda)_\Lambda$ cualquier familia de subconjuntos de X. Se dice que una familia de funciones $(f_\lambda : Y \to X_\lambda)_\Lambda$ tiene la **propiedad universal del producto cartesiano** si para cualquier familia $(g_\lambda : Z \to X_\lambda)_\Lambda$ existe una función, y solamente una, $g : Z \to Y$ tal que $f_\lambda g = g_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda$.

Ejemplo: Del teorema anterior se desprende que para cualquier familia $(X_\lambda)_\Lambda$ de subconjuntos de X, la familia de λ-proyecciones

$$\left(P_\lambda : \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \to X_\lambda \right)_\Lambda$$

es una familia con la propiedad universal del producto cartesiano. Nótese pues la existencia de una familia de funciones con tal propiedad para cada familia de subconjuntos de un conjunto dado.

En la parte que sigue nos valdremos del siguiente lema cuya sencilla demostración aquí se omite.

Lema. Sea $f : A \to B$ una función arbitraria; son equivalentes:

(a) f es biyectiva

(b) $\exists ! g : B \to A . \ni . gf = 1_A, fg = 1_B$

Si esto ocurre g se llama **función inversa** de f y se denota por f^{-1}.

Teniendo presente: 1º que desde la perspectiva conjuntista dos conjuntos se miran como un mismo objeto teórico siempre que entre ellos pueda definirse una correspondencia biunívoca y, 2º que dos funciones son esencialmente una y la misma siempre que mediante una correspondencia biunívoca entre sus dominios pueda pasarse de una en la otra, lo que establece el siguiente resultado es que para cada familia de subconjuntos de un conjunto dado la familia de funciones con la propiedad universal del producto cartesiano es esencialmente única. Toscamente dicho, el resultado establece la esencial unicidad del producto cartesiano de una familia de conjuntos.

Proposición. a) Si $(f_\lambda : Y \to X_\lambda)_\Lambda$ tiene la propiedad universal del producto cartesiano y $h : W \to Y$ es una función biyectiva, entonces la familia $(f_\lambda h : W \to X_\lambda)_\Lambda$ también tiene la propiedad universal del producto cartesiano.

b) Si $(f_\lambda : Y \to X_\lambda)_\Lambda$ y $(f'_\lambda : Y' \to X_\lambda)_\Lambda$ tienen la propiedad universal del producto cartesiano, entonces existe una función, y solamente una, $h : Y \to Y'$ tal que $f'_\lambda h = f_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda$. Además, esta función es biyectiva.

Demostración. a) Sea $(g_\lambda : Z \to X_\lambda)_\Lambda$ cualquier familia de funciones. Por hipótesis existe una única función $g : Z \to Y$ tal que $f_\lambda g = g_\lambda$. Por otra parte, como h es biyectiva, también existe su función inversa, $h^{-1} : Y \to W$, y podemos considerar la composición $h^{-1} g : Z \to W$, para la cual tenemos

$$(f_\lambda h)\left(h^{-1} g\right) = f_\lambda \left(h h^{-1}\right) g = f_\lambda g = g_\lambda$$

Esto demuestra la existencia de la función requerida. Para demostrar su unicidad supongamos que $k : Z \to W$ es una función tal que $(f_\lambda h) k = g_\lambda$. Entonces $f_\lambda (hk) = g_\lambda$; y como g es la única función que satisface esta igualdad, entonces $hk = g$, de donde, dada la biyectividad de h, resulta $k = h^{-1} g$. Esto prueba que $(f_\lambda h : W \to X_\lambda)_\Lambda$ tiene la propiedad universal del producto cartesiano.

b) Puesto que, por hipótesis, $(f'_\lambda : Y' \to X_\lambda)_\Lambda$ tiene la propiedad universal del producto cartesiano, entonces, al considerar la familia $(f_\lambda : Y \to X_\lambda)_\Lambda$ tenemos que existe una función única $h : Y \to Y'$ tal que $f'_\lambda h = f_\lambda$. Análogamente, puesto que también $(f_\lambda : Y \to X_\lambda)_\Lambda$ tiene la propiedad universal del producto cartesiano, al considerar la familia $(f'_\lambda : Y' \to X_\lambda)_\Lambda$ tenemos que existe una función única $h' : Y' \to Y$ tal que $f_\lambda h' = f'_\lambda$. Observemos ahora las composiciones siguientes:

$$\begin{aligned} f'_\lambda (h h') &= (f'_\lambda h) h' = f_\lambda h' = f'_\lambda \\ f_\lambda (h' h) &= (f_\lambda h') h = f'_\lambda h = f_\lambda \end{aligned}$$

Por el inciso (a) del ejercicio 5 sabemos que las únicas funciones con estas propiedades son $1_{Y'}$ y 1_Y, o sea que $hh' = 1_{Y'}$ y $h'h = 1_Y$. Luego, debido al lema anterior, tenemos que h es biyectiva y que h' es su función inversa.@

Agosto 12 de 1985.

Ejercicio: 6. Sea $(X_\lambda)_\Lambda$ una familia arbitraria de subconjuntos de X. Si $\Lambda_1 \subseteq \Lambda$ y $U_\lambda \subseteq X_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda_1$, entonces hacemos

$$\left[(U_\lambda)_{\Lambda_1}\right] = \prod_{\lambda \in \Lambda} X'_\lambda, \text{ donde } X'_\lambda = \begin{cases} X_\lambda, \text{ si } \lambda \notin \Lambda_1 \\ U_\lambda, \text{ si } \lambda \in \Lambda_1 \end{cases}$$

Probar:
a) $\left[(U_\lambda)_{\Lambda_1}\right] = \bigcap_{\lambda \in \Lambda_1} [U_\lambda]$
b) Si $\lambda \in \Lambda$ y $U_\lambda \subseteq X_\lambda$, entonces $[U_\lambda] = P_\lambda^{-1}(U_\lambda)$.
Ejemplos: 1) Sea $(X_\lambda)_\Lambda$ una familia arbitraria de subconjuntos de X y sea

$$\prod_{\lambda \in \Lambda}{}' X_\lambda = \left\{ \left(\Lambda, f, \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \right) : f(\lambda) \in X_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda \right\}$$

Si para cada $\lambda \in \Lambda$ se define la función

$$P'_\lambda : \prod_{\lambda \in \Lambda}{}' X_\lambda \to X_\lambda$$

como $P'_\lambda(f) = f(\lambda)$, entonces la familia de funciones

$$\left(P'_\lambda : \prod_{\lambda \in \Lambda}{}' X_\lambda \to X_\lambda \right)_\Lambda$$

tiene la propiedad universal del producto cartesiano.

Dem. Ya sabemos que la familia de λ-proyecciones tiene esta propiedad; entonces, debido a la proposición anterior, basta demostrar que existe una función biyectiva h tal que $P_\lambda h = P'_\lambda$.

Sea entonces

$$h : \prod_{\lambda \in \Lambda}{}' X_\lambda \to \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \text{ definida como } h\left(\Lambda, f, \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \right) = (\Lambda, f)$$

y consideremos también la función

$$h' : \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \to \prod_{\lambda \in \Lambda}{}' X_\lambda \text{ dada por } h'(\Lambda, f) = \left(\Lambda, f, \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \right)$$

De las composiciones de una con la otra tenemos

$$\begin{aligned} h'h\left(\Lambda, f, \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \right) &= h'\left(h\left(\Lambda, f, \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \right) \right) \\ &= h'(\Lambda, f) = \left(\Lambda, f, \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \right) \end{aligned}$$

$$hh'(\Lambda, f) = h(h'(\Lambda, f)) = h\left(\Lambda, f, \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \right) = (\Lambda, f)$$

de modo que, debido al lema anterior, $h'h = 1_{\prod'_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda}$ y $hh' = 1_{\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda}$, lo que significa que h es biyectiva. Luego, debido a la proposición anterior, la familia

$$\left(P_\lambda h : \prod_{\lambda \in \Lambda}{}' \to X_\lambda \right)_\Lambda$$

tiene la propiedad universal del producto cartesiano, y como para toda $\lambda \in \Lambda$ se tiene

$$P_\lambda h\left(\Lambda, f, \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \right) = P_\lambda(\Lambda, f) = f(\lambda) = P'_\lambda(f)$$

entonces resulta precisamente lo que había que demostrar.@

Observación. Ya sabemos que si $A_\lambda \subseteq X_\lambda, \forall\lambda \in \Lambda$, entonces $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \subseteq \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. Sin embargo, en el caso de $\prod'$ no necesariamente ocurre esto pues el codominio de las funciones que son elementos de $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}{}' X_\lambda$ es $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, en tanto que el de las funciones que son elementos de $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}{}' A_\lambda$ es $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ que, desde luego, no tiene por qué coincidir con la unión anterior; luego, las funciones pueden ser distintas. (Willard, en su tratado de topología general, comete el error de decir que $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}{}' A_\lambda \subseteq \prod\limits_{\lambda\in\Lambda}{}' X_\lambda$).

2) Sean, X un conjunto arbitrario, $n \in \mathbb{N}$ y hagamos $\Lambda = \{1, 2, ..., n\}$. Definimos, el conjunto X^n como

$$\{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in X, \forall i \in \Lambda\}$$

y, para cada $i \in \Lambda$, la función

$$\widehat{P}_i : X^n \to X \text{ como } \widehat{P}_i(x_1, x_2, ..., x_n) = x_i$$

Entonces

$$\left(\widehat{P}_i : X^n \to X\right)_\Lambda$$

es una familia con la propiedad universal del producto cartesiano.

Dem. Hagamos $X_\lambda = X, \forall\lambda \in \Lambda$ y definamos las funciones:

$$\begin{aligned} h &: X^n \to \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, \text{ por } h(x_1, x_2, ..., x_n) = (\Lambda, f), \text{ donde } f(i) = x_i; \\ h' &: \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to X^n, \text{ tal que } h'(\Lambda, f) = (f(1), f(2), ..., f(n)). \end{aligned}$$

Al componer una con la otra tenemos

$$h'h(x_1, .., x_n) = h'(h(x_1, .., x_n)) = h'(\Lambda, f) = (f(1), .., f(n)) = (x_1, .., x_n)$$
$$hh'(\Lambda, f) = h(h'(\Lambda, f)) = h(f(1), f(2), ..., f(n)) = (\Lambda, f)$$

$$\therefore h'h = 1_{X^n} \text{ y } hh' = 1_{\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda}$$

lo que significa que h es biyectiva. Además

$$P_\lambda h(x_1, x_2, ..., x_n) = P_\lambda(\Lambda, f) = f(\lambda) = x_\lambda = \widehat{P}_\lambda(x_1, x_2, ..., x_n);$$

en consecuencia, y debido a la proposición anterior, resulta que la familia

$$\left(\widehat{P}_i : X^n \to X\right)_\Lambda$$

tiene la propiedad universal del producto cartesiano.@

Agosto 14 de 1985.

3) Sean $X_1, X_2, ..., X_n \subseteq X$ y hagamos

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in X_i, \forall i \in \Lambda\}, \text{ siendo } \Lambda = \{1, .., n\}$$

Para $i \in \Lambda$, $\widetilde{P}_i$ es la función

$$\widetilde{P}_i : X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \to X_i \text{ dada por } \widetilde{P}_i(x_1, x_2, ..., x_n) = x_i, \forall i \in \Lambda.$$

Entonces la familia de funciones

$$\left(\widetilde{P}_i : X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \to X_i\right)_\Lambda$$

tiene la propiedad universal del producto cartesiano.

Dem. Procederemos como antes, definiendo las funciones

$$h : X_1 \times \cdots \times X_n \to \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda . \ni . h(x_1, .., x_n) = (\Lambda, f), \text{ con } f(\lambda) = x_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda$$
$$h' : \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to X_1 \times \cdots \times X_n . \ni . h'(\Lambda, f) = (f(1), ..., f(n))$$

Entonces

$$h'h(x_1, .., x_n) = h'(h(x_1, .., x_n)) = h'(\Lambda, f) = (f(1), .., f(n)) = (x_1, .., x_n)$$
$$hh'(\Lambda, f) = h(h'(\Lambda, f)) = h(f(1), ..., f(n)) = (\Lambda, f)$$
$$\therefore h'h = 1_{X_1\times X_2\times\cdots\times X_n} \text{ y } hh' = 1_{\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda}$$

Por lo tanto h es biyectiva. Luego, según la proposición anterior, la familia $(P_\lambda h)_\Lambda$ tiene la propiedad universal del producto cartesiano; pero $P_\lambda h = \widetilde{P}_\lambda$, ya que para cualquier $\lambda \in \Lambda$ se tiene

$$P_\lambda h(x_1, ..., x_n) = P_\lambda(\Lambda, f) = f(\lambda) = x_\lambda = \widetilde{P}_\lambda(x_1, ..., x_n)$$

Por lo tanto, la familia $\left(\widetilde{P}_\lambda\right)_\Lambda$ tiene la propiedad universal del producto cartesiano, como se había asegurado.@

Observación. Nótese que en este caso es cierto que si $A_i \subseteq X_i, \forall i \in \Lambda$, entonces

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \subseteq X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$$

Por otra parte, también es importante señalar que nuestra definición de producto cartesiano nada dice del orden en que este producto se efectúe pues, valiéndose del concepto de “función”, el orden que entre sí guarden los factores (si es que hay tal) es absolutamente irrelevante en la definición del producto. No así en el caso de $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ pues cuando en su definición se exige que la i-ésima componente de cada eneada sea un elemento del i-ésimo conjunto correspondiente se impone implícitamente el orden en que los conjuntos se hayan multiplicado, siendo así que, por ejemplo, si $X_1 \neq X_2$, entonces

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \neq X_2 \times X_1 \times \cdots \times X_n$$

4.4 Producto cartesiano de una familia de funciones

4) Sean $(X_\lambda)_\Lambda$ y $(Y_\lambda)_\Lambda$ dos familias de subconjuntos de X y Y, respectivamente. Supongamos que para cada $\lambda \in \Lambda$ existe una función $f_\lambda : X_\lambda \to Y_\lambda$ y consideremos la familia

$$\left(f_\lambda P_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to Y_\lambda\right)_\Lambda$$

Como la familia

$$\left(q_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda \to Y_\lambda\right)_\Lambda$$

de λ-proyecciones de la familia $(Y_\lambda)_\Lambda$ tiene la propiedad universal del producto cartesiano, existe una función única

$$\Pi f_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$$

tal que $q_\lambda \Pi f_\lambda = f_\lambda P_\lambda$. A esta función se le llama **producto cartesiano de la familia de funciones** $(f_\lambda)_\Lambda$. Ya sabemos cuáles son su dominio y su codominio. Para tener un total conocimiento de ella debiéramos averiguar cuál es su regla de correspondencia. Tendremos descrita esta regla cuando digamos qué “función” (Λ, g) de $\prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ asocia Πf_λ al elemento (Λ, f) de $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$; para ello hay que hallar la relación que a través de Πf_λ existe entre la regla g de (Λ, g) y la regla f de (Λ, f). Esta relación es fácil de hallar valiéndonos de la igualdad anterior.

En efecto, si $(\Lambda, g) = \Pi f_\lambda (\Lambda, f)$, entonces, en vista de aquella igualdad, por un lado tenemos que

$$q_\lambda \Pi f_\lambda (\Lambda, f) = q_\lambda (\Lambda, g) = g(\lambda)$$

mientras que por otro lado

$$f_\lambda P_\lambda (\Lambda, f) = f_\lambda (f(\lambda))$$

Por lo tanto $g(\lambda) = f_\lambda (f(\lambda))$. Esta es la parte esencial en la descripción de la función Πf_λ.@

Ejercicio: 7. Sea $(X_\lambda)_\Lambda$ una familia arbitraria de subconjuntos de X; si λ_0 es un elemento fijo de Λ y $(A_i)_I$ es una familia de subconjuntos de X_{λ_0}, pruebe:

a) $\left[\bigcup_{i\in I} A_i\right] = \bigcup_{i\in I} [A_i]$;

b) $\left[\bigcap_{i\in I} A_i\right] = \bigcap_{i\in I} [A_i]$.

Agosto 16 de 1985

Lema. Sea $(X_\lambda)_\Lambda$ una familia arbitraria de subconjuntos de X; si $A_\lambda, B_\lambda \subseteq X_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda$, entonces

$$\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cap \left(\prod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right) = \prod_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda \cap B_\lambda)$$

Demostración. $(\supseteq)$ Como $A_\lambda \cap B_\lambda \subseteq A_\lambda$ y $A_\lambda \cap B_\lambda \subseteq B_\lambda$, entonces

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda \cap B_\lambda) \subseteq \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \text{ y } \prod_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda \cap B_\lambda) \subseteq \prod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$$
$$\therefore \prod_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda \cap B_\lambda) \subseteq \left(\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cap \left(\prod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right)$$

$(\subseteq)$ Sea $(\Lambda, f) \in \left(\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cap \left(\prod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right)$; entonces $(\Lambda, f) \in \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ y $(\Lambda, f) \in \prod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$; $\therefore f(\lambda) \in A_\lambda$ y $f(\lambda) \in B_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda$; $\therefore f(\lambda) \in A_\lambda \cap B_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda$; $\therefore (\Lambda, f) \in \prod_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda \cap B_\lambda)$;

$$\therefore \left(\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cap \left(\prod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right) \subseteq \prod_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda \cap B_\lambda)$$

El lema está demostrado.@

4.5 Producto Topológico y Topología de Tychonoff

Definición. Sea $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ una familia arbitraria de espacios topológicos, donde $(X_\lambda)_\Lambda$ es una familia arbitraria de subconjuntos de X. Llamaremos **producto topológico** de $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ al espacio topológico $\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, \tau\right)$ en el cual τ es la topología generada por la familia

$$\gamma = \{[U_\lambda] : U_\lambda \in \tau_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda\}.$$

A esta topología se le llama **topología de Tychonoff** para $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. Denotaremos al producto topológico de $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ como $\prod_{\lambda\in\Lambda} (X_\lambda, \tau_\lambda)$.

Proposición. Si $\gamma = \{[U_\lambda] : U_\lambda \in \tau_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda\}$, entonces

$$\beta(\gamma) = \{[U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, ..., U_{\lambda_n}] : U_{\lambda_i} \in \tau_{\lambda_i}\}$$

Demostración. $\subseteq$) Sea $B \in \beta(\gamma)$; entonces $B = \bigcap_{\lambda \in \Lambda_1} [U_\lambda]$, con $[U_\lambda] \in \gamma, \forall \lambda \in \Lambda_1$, siendo Λ_1 un subconjunto finito de Λ. Haciendo $\Lambda_1 = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ tenemos, por (a) del ejercicio 6, que

$$B = \left[(U_\lambda)_{\Lambda_1}\right] = [U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, ...U_{\lambda_n}]$$

$\supseteq$) Por el mismo ejercicio tenemos que

$$[U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, ..., U_{\lambda_n}] = [U_{\lambda_1}] \cap [U_{\lambda_2}] \cap \cdots \cap [U_{\lambda_n}]$$

lo que significa que toda expresión de este estilo es una intersección finita de elementos de γ, o sea, un miembro de $\beta(\gamma)$.@

Proposición. Sea $A_\lambda \subseteq X_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda$. Si τ es la topología de Tychonoff para $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$, entonces la topología de Tychonoff para $\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ coincide con $\tau \mid \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$.

Demostración. Sea τ' la topología de Tychonoff para $\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$. Por la proposición anterior, una base para τ' es

$$\{[U_{\lambda_1} \cap A_{\lambda_1}, U_{\lambda_2} \cap A_{\lambda_2}, ..., U_{\lambda_n} \cap A_{\lambda_n}] : U_{\lambda_i} \in \tau_{\lambda_i}\}$$

Por otra parte sabemos que si $A \subseteq X$ y β es una base de la topología de X, entonces $\{A \cap B : B \in \beta\}$ es una base de $\tau \mid A$. Por lo tanto

$$\left\{[U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, ..., U_{\lambda_n}] \cap \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda : U_{\lambda_i} \in \tau_{\lambda_i}\right\}$$

es una base de $\tau \mid \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$. Por el lema anterior tenemos que

$$[U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, ..., U_{\lambda_n}] \cap \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \prod_{\lambda \in \Lambda} A'_\lambda, \text{ donde}$$

$$A'_\lambda = \begin{cases} X_\lambda \cap A_\lambda = A_\lambda, \text{ si } \lambda \neq \lambda_i, \forall i \in \{1, 2, ..., n\} \\ U_{\lambda_i} \cap A_{\lambda_i}, \text{ si } \lambda = \lambda_i, \text{ p.a. } i \in \{1, 2, ..., n\} \end{cases}$$

$$\therefore [U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, ..., U_{\lambda_n}] \cap \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = [U_{\lambda_1} \cap A_{\lambda_1}, U_{\lambda_2} \cap A_{\lambda_2}, ..., U_{\lambda_n} \cap A_{\lambda_n}]$$

Esto prueba que las bases descritas son iguales. Por lo tanto $\tau \mid \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \tau'$.@

Continuaremos la vez próxima.

Lunes 19 de agosto de 1985

Ejemplo 1. Sea $\Lambda = \emptyset$; se sabe que en este caso $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = \{(\emptyset, (\emptyset, \emptyset))\}$; por lo tanto, $\tau = \{(\emptyset, (\emptyset, \emptyset)), \emptyset\}$ y $\gamma = \emptyset$.

TEOREMA 1. Sea $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ una familia arbitraria de espacios topológicos y supongamos que $C_\lambda \subseteq X_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda$. Entonces:

a) $\overline{\prod_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda} = \prod_{\lambda \in \Lambda} \overline{C_\lambda}$

b) Si cada C_λ es cerrado en $(X_\lambda, \tau_\lambda)$, entonces $\prod_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ es cerrado en $\prod_{\lambda \in \Lambda} (X_\lambda, \tau_\lambda)$.

Demostración. a) Consideremos primero el caso en que $\Lambda = \emptyset$. Como sólo hay una familia vacía de subconjuntos de X, entonces

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = \prod_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda = \prod_{\lambda \in \Lambda} \overline{C_\lambda}; \therefore \overline{\prod_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda} = \prod_{\lambda \in \Lambda} \overline{C_\lambda}.$$

Si $\Lambda \neq \emptyset$ pero $C_{\lambda_0} = \emptyset$, p.a. $\lambda_0 \in \Lambda$, entonces $\overline{C_{\lambda_0}} = \emptyset$;

$$\therefore \prod_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda = \emptyset, \prod_{\lambda \in \Lambda} \overline{C_\lambda} = \emptyset; \therefore \overline{\prod_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda} = \prod_{\lambda \in \Lambda} \overline{C_\lambda}.$$

Supongamos que $\Lambda \neq \emptyset$ y que $C_\lambda \neq \emptyset, \forall \lambda \in \Lambda$. Verifiquemos primero la contención de izquierda a derecha: Sea $(\Lambda, f) \in \overline{\prod_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda}$; hay que probar que $f(\lambda) \in \overline{C_\lambda}, \forall \lambda \in \Lambda$. Sea $\lambda_0 \in \Lambda$ arbitrario y sea U_{λ_0} cualquier vecindad abierta de $f(\lambda_0)$; $\therefore f(\lambda_0) \in U_{\lambda_0} \in \tau_{\lambda_0}$; pero entonces $[U_{\lambda_0}] \in \gamma \subseteq \tau$, donde γ es la subbase de la topología de Tychonoff de $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, y como $f(\lambda_0) \in U_{\lambda_0}$, entonces $(\Lambda, f) \in [U_{\lambda_0}] \in \mathcal{N}^\circ_{(\Lambda,f)}$; $\therefore [U_{\lambda_0}] \cap \prod_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda \neq \emptyset$. Por el lema anterior

$$[U_{\lambda_0}] \cap \prod_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda = \prod_{\lambda\in\Lambda} C'_\lambda, \text{ donde } C'_\lambda = \begin{cases} X_\lambda \cap C_\lambda = C_\lambda, \text{ si } \lambda \neq \lambda_0 \\ U_{\lambda_0} \cap C_{\lambda_0}, \text{ si } \lambda = \lambda_0 \end{cases}$$

En consecuencia, ninguno de los factores de este producto puede ser vacío; y como λ_0 se escogió arbitrariamente en Λ, entonces

$$U_\lambda \cap C_\lambda \neq \emptyset, \forall U_\lambda \in \mathcal{N}^\circ_{f(\lambda)}, \lambda \in \Lambda$$

lo que significa que $f(\lambda) \in \overline{C_\lambda}, \forall \lambda \in \Lambda$;

$$\therefore (\Lambda, f) \in \prod_{\lambda\in\Lambda} \overline{C_\lambda}; \therefore \overline{\prod_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda} \subseteq \prod_{\lambda\in\Lambda} \overline{C_\lambda}.$$

Para probar la contención de derecha a izquierda recordemos que en cualquier espacio topológico la cerradura de un conjunto A se puede caracterizar como el conjunto de aquellos puntos del espacio cuyas vecindades básicas tienen intersección no vacía con A. Sean $(\Lambda, f) \in \prod_{\lambda\in\Lambda} \overline{C_\lambda}$ y

$$[U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, ..., U_{\lambda_n}] \in \beta(\gamma) .\ni. (\Lambda, f) \in [U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, ..., U_{\lambda_n}];$$

entonces $[U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, ..., U_{\lambda_n}]$ es una vecindad básica de (Λ, f). Por el lema anterior tenemos

$$[U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, ..., U_{\lambda_n}] \cap \prod_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda = \prod_{\lambda\in\Lambda} C'_\lambda, \text{ donde}$$

$$C'_\lambda = \begin{cases} X_\lambda \cap C_\lambda = C_\lambda, \text{ si } \lambda \neq \lambda_i, \forall i \in \{1, 2, ..., n\} \\ U_{\lambda_i} \cap C_{\lambda_i}, \text{ si } \lambda = \lambda_i, \text{ p.a. } i \in \{1, 2, ..., n\} \end{cases}$$

Por hipótesis, $C_\lambda \neq \emptyset, \forall \lambda \in \Lambda$, y como $f(\lambda_i) \in \overline{C_{\lambda_i}}$ y $f(\lambda_i) \in U_{\lambda_i}$, entonces también $U_{\lambda_i} \cap C_{\lambda_i} \neq \emptyset, \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$. Por lo tanto $\prod_{\lambda\in\Lambda} C'_\lambda \neq \emptyset$, y como $\left[U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, ..., U_{\lambda_n}\right]$ es cualquier vecindad básica de (Λ, f), entonces $(\Lambda, f) \in \overline{\prod_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda}$ y, por lo tanto, $\prod_{\lambda\in\Lambda} \overline{C_\lambda} \subseteq \overline{\prod_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda}$.

b) Si cada C_λ es cerrado en $(X_\lambda, \tau_\lambda)$, entonces $C_\lambda = \overline{C_\lambda}$; por lo tanto $\prod_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda = \prod_{\lambda\in\Lambda} \overline{C_\lambda}$, y como por (a) $\prod_{\lambda\in\Lambda} \overline{C_\lambda} = \overline{\prod_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda}$, entonces $\prod_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda = \overline{\prod_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda}$, lo que significa que $\prod_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda$ es cerrado en $\prod_{\lambda\in\Lambda} (X_\lambda, \tau_\lambda)$.@

Agosto 21 de 1985

Teorema 2. Sea $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ una familia arbitraria de espacios topológicos y sea τ la topología de Tychonoff de $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. Si γ_λ es una subbase de τ_λ, para cada $\lambda \in \Lambda$, y

$$\gamma' = \{[U_\lambda] : U_\lambda \in \gamma_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda\}$$

entonces la topología τ' para $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ generada por γ' coincide con la de Tychonoff.

Demostración. Si γ denota a la subbase de la topología de Tychonoff, entonces $\gamma' \subseteq \gamma$ porque $\gamma_\lambda \subseteq \tau_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda$; por consiguiente, $\tau' \subseteq \tau$. La contención en sentido contrario también ocurre porque $\gamma \subseteq \tau'$. En efecto, si $[U_\lambda] \in \gamma$ entonces $U_\lambda \in \tau_\lambda$, y como γ_λ es subbase de τ_λ entonces $U_\lambda = \bigcup_{j\in J} U_j$, donde $U_j \in \beta(\gamma_\lambda), \forall j \in J$; pero si $U \in \beta(\gamma_\lambda)$ entonces $[U] \in \tau'$ ya que en tal caso $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$, con $U_i \in \gamma_\lambda$ y $n \in \mathbb{N}$, de modo que $[U_i] \in \gamma'$ y, a consecuencia del ejercicio 7, $[U] = \bigcap_{i=1}^{n} [U_i] \in \tau'$. Por lo tanto, y a consecuencia del mismo ejercicio, $[U_\lambda] = \bigcup_{j\in J} [U_j] \in \tau'$; $\therefore \gamma \subseteq \tau'; \therefore \tau \subseteq \tau'; \therefore \tau' = \tau$.@

Def. Llamaremos **singular** a un espacio (X,τ) si X consta de un solo punto.

Ejemplo 2. Sea $(X_\lambda,\tau_\lambda)_\Lambda$ una familia no vacía de espacios discretos no vacíos. Entonces $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}(X_\lambda,\tau_\lambda)$ es discreto si, y sólo si, todos los miembros de la familia, salvo un número finito, son singulares.

($\Leftarrow$) Se sabe que un espacio topológico (X,τ) es discreto si, y sólo si, $\{x\}\in\tau,\forall x\in X$. Veamos que esto sucede con $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}(X_\lambda,\tau_\lambda)$ si suponemos que casi todo X_λ es singular. En efecto, sea $X_\lambda=\{x_\lambda\},\forall\lambda\neq\lambda_i,(i=1,..,n)$ y sea $(\Lambda,f)\in\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}(X_\lambda,\tau_\lambda)$. Entonces $f(\lambda)\in X_\lambda,\forall\lambda\in\Lambda$; si $\lambda\neq\lambda_i$, entonces $f(\lambda)\in\{x_\lambda\}$, y si $\lambda=\lambda_i$, entonces $f(\lambda)\in X_{\lambda_i}$. Debido a la discreción de X_{λ_i} tenemos que $\{f(\lambda_i)\}\in\tau_{\lambda_i},\forall i\in\{1,2,...,n\}$. Por lo tanto

$$[\{f(\lambda_1)\},\{f(\lambda_2)\},...,\{f(\lambda_n)\}]\in\beta(\gamma)\text{; pero}$$

$$[\{f(\lambda_1)\},\{f(\lambda_2)\},...,\{f(\lambda_n)\}]=\prod_{\lambda\in\Lambda}X'_\lambda\text{, donde}$$

$$X'_\lambda=\begin{cases}X_\lambda\text{, si }\lambda\neq\lambda_i\\ \{f(\lambda_i)\}\text{, si }\lambda=\lambda_i\end{cases}$$

Luego, para $(\Lambda,f')\in\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}X'_\lambda$ tenemos

$$f'(\lambda)\in\begin{cases}\{x_\lambda\}\text{, si }\lambda\neq\lambda_i\\ \{f(\lambda_i)\}\text{, si }\lambda=\lambda_i\end{cases}\text{ i.e. }f'(\lambda)=\begin{cases}x_\lambda=f(\lambda)\text{, si }\lambda\neq\lambda_i\\ f(\lambda_i)\text{, si }\lambda=\lambda_i\end{cases};$$

$$\therefore(\Lambda,f)=(\Lambda,f');\therefore[\{f(\lambda_1)\},\{f(\lambda_2)\},...,\{f(\lambda_n)\}]=\{(\Lambda,f)\}$$

Por lo tanto $\{(\Lambda,f)\}$ es abierto en $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}(X_\lambda,\tau_\lambda)$; por lo tanto $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}(X_\lambda,\tau_\lambda)$ es discreto.

($\Rightarrow$) Supongamos ahora que $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}(X_\lambda,\tau_\lambda)$ es discreto; entonces

$$\{(\Lambda,f)\}\in\tau,\forall(\Lambda,f)\in\prod_{\lambda\in\Lambda}(X_\lambda,\tau_\lambda)$$

Por otra parte, como también cada (X_λ,τ_λ) es discreto, entonces

$$\gamma_\lambda=\{\{x_\lambda\}:x_\lambda\in X_\lambda\}$$

es una subbase de $\tau_\lambda,\forall\lambda\in\Lambda$. Luego, en vista del teorema 2, τ está generada por

$$\gamma'=\{[\{x_\lambda\}]:\{x_\lambda\}\in\gamma_\lambda\}$$

Por lo tanto$\{(\Lambda,f)\}$ es unión de elementos de $\beta(\gamma')$ y como consta de un solo punto, entonces debe coincidir con algún elemento de $\beta(\gamma')$, es decir, debe ser de la forma $[\{x_{\lambda_1}\},\{x_{\lambda_2}\},...,\{x_{\lambda_n}\}]$;

$$\therefore\{(\Lambda,f)\}=\prod_{\lambda\in\Lambda}X'_\lambda\text{, con }X'_\lambda=\begin{cases}X_\lambda\text{, si }\lambda\neq\lambda_i\\ \{x_{\lambda_i}\}\text{, si }\lambda=\lambda_i\end{cases}$$

Luego $f(\lambda)\in X_\lambda$, y si para algún $\lambda_0\neq\lambda_i$ ocurriese que $X_{\lambda_0}-\{f(\lambda_0)\}\neq\emptyset$, entonces, definiendo (Λ,f') de tal manera que

$$f'(\lambda)\in\begin{cases}X_\lambda\text{, si }\lambda\neq\lambda_0,\lambda_i\\ \{x_{\lambda_i}\}\text{, si }\lambda=\lambda_i\\ X_{\lambda_0}-\{f(\lambda_0)\}\text{, si }\lambda\neq\lambda_0\end{cases}$$

tendríamos $(\Lambda,f')\neq(\Lambda,f)$ y $(\Lambda,f')\in[\{x_{\lambda_1}\},\{x_{\lambda_2}\},...,\{x_{\lambda_n}\}]$, lo cual es imposible porque el único elemento de este abierto básico es precisamente (Λ,f). Esto demuestra que X_λ es singular si $\lambda\neq\lambda_i$.@

Ejercicio: 8. Sea $(X_\lambda,\tau_\lambda)_\Lambda$ una familia no vacía de espacios topológicos no vacíos. Probar que $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}(X_\lambda,\tau_\lambda)$ es indiscreto si, y sólo si, (X_λ,τ_λ) es indiscreto para toda $\lambda\in\Lambda$.

5

Funciones Continuas, Inmersión y Propiedad Universal del Producto Topológico.

Agosto 23 de 1985

Definiciones. Una **función del espacio topológico (X,τ) en el espacio topológico (Y,σ)** es una función con dominio X y con codominio Y. Notación: $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$.

Sean, $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ una función y $x \in \mathbb{E}$, arbitrarios; se dice que f **es continua en x** si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta (\varepsilon) > 0 . \ni . \rho (x', x) < \delta (\varepsilon) \Rightarrow \rho (f (x'), f (x)) < \varepsilon$$

Dicho de otro modo:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 . \ni . x' \in D_\delta (x) \Rightarrow f (x') \in D_\varepsilon f (x) .$$

De modo más general, si $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$ es una función y $x \in \mathbb{E}^n$, entonces **f es continua en x** si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 . \ni . f (D_\delta (x)) \subseteq D_\varepsilon (f (x))$$

Proposición. Sea $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$ una función arbitraria; son equivalentes:
a) f es continua en $x \in \mathbb{E}^n$
b) $\forall V \in \mathcal{N}_{f(x)} \exists U \in \mathcal{N}_x . \ni . f (U) \subseteq V$

Demostración: (a) $\Rightarrow$(b) Sea $V \in \mathcal{N}_{f(x)}$; por ser la familia de discos abiertos una base local en $f(x)$ existe $D_\varepsilon (f (x)) \subseteq V$. Por (a), existe $D_\delta (x)$ tal que $f (D_\delta (x)) \subseteq D_\varepsilon (f (x))$, y como $D_\delta (x) \in \mathcal{N}_x$, entonces se satisface (b).

(b) $\Rightarrow$(a) Sea $\varepsilon > 0$; entonces $D_\varepsilon (f (x)) \in \mathcal{N}_{f(x)}$. Por (b) existe $U \in \mathcal{N}_x$ tal que $f (U) \subseteq D_\varepsilon (f (x))$, y como $\{D_\delta (x) : \delta > 0\}$ es una base local en x, entonces existe $\delta > 0$ tal que $D_\delta (x) \subseteq U$; luego, $f (D_\delta (x)) \subseteq f (U)$; $\therefore f (D_\delta (x)) \subseteq D_\varepsilon (f (x))$.@

Tras haber observado que esta propiedad se cumple para funciones en $\mathbb{E}^n$, daremos la definición de función continua entre espacios topológicos como sigue:

Definición. Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ una función arbitraria y sea $x \in X$. Diremos que **f es continua en x** si para cualquier $V \in \mathcal{N}_{f(x)}$ existe $U \in \mathcal{N}_x$ tal que $f (U) \subseteq V$; diremos que es **continua** si lo es en cada punto x de X.

Proposición. Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ una función arbitraria; son equivalentes:
(a) f es continua en $x \in X$.
(b) Si $V \in \mathcal{N}_{f(x)}$ entonces $f^{-1} (V) \in \mathcal{N}_x$.

Demostración: (a) $\Rightarrow$(b) Sea $V \in \mathcal{N}_{f(x)}$. Por (a) existe $U \in \mathcal{N}_x$ tal que $f (U) \subseteq V$; luego, $U \subseteq f^{-1} (V)$; $\therefore f^{-1} (V) \in \mathcal{N}_x$.

(b) $\Rightarrow$(a) Sea $V \in \mathcal{N}_{f(x)}$. Por (b) $f^{-1} (V) \in \mathcal{N}_x$, y como $f \left(f^{-1} (V)\right) \subseteq V$, entonces f es continua en x.@

Ejemplos: 1. Toda función continua en el sentido tradicional es continua.

2. La función identidad $1_{(X,\tau)} : (X, \tau) \to (X, \tau)$ es continua porque $1^{-1}_{(X,\tau)} (V) = V$, para cualquier $V \in \mathcal{N}_x$ y para cualquier $x \in X$.

3. Si (X, τ) es un espacio topológico y $A \subseteq X$, llamaremos **inclusión** a la función $\iota : (A, \tau \mid A) \to (X, \tau)$ dada por $\iota (a) = a, \forall a \in A$. ι es continua porque si $a \in A$ y $V \in \mathcal{N}_a$ entonces $\iota^{-1} (V) = V \cap A \in \mathcal{N}_{a,A}$.

4. Sean $(X, \tau) \xrightarrow{f} (Y, \sigma) \xrightarrow{g} (Z, \varrho)$ dos funciones cualesquiera; si f es continua en $x_0 \in X$ y g es continua en $f (x_0) \in Y$, entonces $gf : (X, \tau) \to (Z, \varrho)$ es continua en x_0. En efecto, sea $W \in \mathcal{N}_{gf(x_0)}$; entonces

$$(gf)^{-1} (W) = \left(f^{-1} g^{-1}\right) (W) = f^{-1} \left(g^{-1} (W)\right) ;$$

por la continuidad de g en $f(x_0)$, $g^{-1}(W) \in \mathcal{N}_{f(x_0)}$, y por la continuidad de f en x_0, $f^{-1}\left(g^{-1}(W)\right) \in \mathcal{N}_{x_0}$; por lo tanto gf es continua en x_0.

5. A consecuencia del ejemplo anterior, si $(X,\tau) \xrightarrow{f} (Y,\sigma)$ y $(Y,\sigma) \xrightarrow{g} (Z,\varrho)$ son funciones continuas, entonces también lo es $(X,\tau) \xrightarrow{gf} (Z,\varrho)$.

Teorema. Sea $f:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ una función arbitraria; son equivalentes:

(a) f es continua.

(b) Si $V \in \sigma$, entonces $f^{-1}(V) \in \tau$.

(c) Si D es cerrado en (Y,σ), entonces $f^{-1}(D)$ es cerrado en (X,τ).

(d) Para cualquier subconjunto A de X, $f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$.

(e) Para cualquier subconjunto B de Y, $f^{-1}\left(\overline{B}\right) \supseteq \overline{f^{-1}(B)}$.

Demostración: (a) $\Rightarrow$ (b) Sea $V \in \sigma$ y sea $x \in f^{-1}(V)$; entonces $f(x) \in V$ y $V \in \mathcal{N}_{f(x)}$. Por (a), $f^{-1}(V) \in \mathcal{N}_x$; por lo tanto podemos asegurar que $f^{-1}(V)$ contiene una vecindad de cada uno de sus puntos (a saber: $f^{-1}(V)$). Por lo tanto, $f^{-1}(V) \in \tau$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Sea $x \in X$ y sea $V \in \mathcal{N}_{f(x)}$; entonces existe $B \in \sigma$ tal que $f(x) \in B \subseteq V$; luego, $x \in f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(V)$. Por (b), $f^{-1}(B) \in \tau$; $\therefore$ $f^{-1}(V) \in \mathcal{N}_x$. Por lo tanto f es continua en x, y como x se escogió arbitrariamente en X, entonces f es continua.

(b) $\Rightarrow$ (c) Sea D cualquier cerrado en (Y,σ); entonces $Y - D \in \sigma$. Por (b), $f^{-1}(Y-D) \in \tau$; pero $f^{-1}(Y-D) = X - f^{-1}(D)$. Luego, $f^{-1}(D)$ es cerrado.

(c) $\Rightarrow$ (b) Sea V un abierto en Y según σ; entonces $Y - V$ es cerrado en Y. Por (c), $f^{-1}(Y-V)$ es cerrado en X, y como $f^{-1}(Y-V) = X - f^{-1}(V)$, entonces $f^{-1}(V) \in \tau$.

(c) $\Rightarrow$ (d) Como $f(A) \subseteq \overline{f(A)}$, entonces $A \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$, que, por (c), es cerrado en (X,τ). Luego, $\overline{A} \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$; $\therefore$ $f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$.

(d) $\Rightarrow$ (e) Sea $B \subseteq Y$; por (d), $f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right) \subseteq \overline{f\left(f^{-1}(B)\right)}$, y como $\overline{f\left(f^{-1}(B)\right)} \subseteq \overline{B}$, entonces $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right)$.

(e) $\Rightarrow$ (b) Sea $V \in \sigma$; entonces $Y - V$ es cerrado; $\therefore$ $f^{-1}\left(\overline{Y-V}\right) = f^{-1}(Y-V)$; aplicando (e) tenemos $f^{-1}(Y-V) \supseteq \overline{f^{-1}(Y-V)}$; y como la contención en sentido contrario también es válida, resulta que $f^{-1}(Y-V) = X - f^{-1}(V)$ es cerrado y, por lo tanto, $f^{-1}(V) \in \tau$.@

Agosto 28 de 1985

Corolario. Sea $f:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ una función arbitraria. Si para todo elemento G de alguna subbase γ de σ se tiene que $f^{-1}(G) \in \tau$, entonces f es continua.

Demostración: Sea $\beta(\gamma)$la base de σ generada por γ y sea $B \in \beta$; entonces $B = \bigcap_{i=1}^{n} G_i$, con $G_i \in \gamma, \forall i \in \{1,2,...,n\}$. Por lo tanto, $f^{-1}(B) = \bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}(G_i) \in \tau$. Sea $V \in \sigma$; entonces $V = \bigcup_{j\in J} B_j$, con $B_j \in \beta(\gamma), \forall j \in J$. Por lo tanto, $f^{-1}(V) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j) \in \tau$. Por (b) del teorema anterior, f es continua.@

<u>*Ejercicio:*</u> 9. Sean, $B \subseteq Y$, $\iota:(B,\sigma \mid B) \to (Y,\sigma)$ la inclusión y $g:(X,\tau) \to (B,\sigma \mid B)$ una función tal que $\iota g:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ es continua. Probar que g es continua.

<u>*Ejemplos:*</u> 6. Sea (Y,σ) un espacio topológico. Entonces (Y,σ) es indiscreto si, y sólo si, toda función f de codominio (Y,σ) cuyo dominio sea cualquier espacio topológico es continua.

($\Rightarrow$) Sea (X,τ) cualquier espacio topológico y supongamos que (Y,σ) es indiscreto. Entonces $\sigma = \{Y,\emptyset\}$ y como para cualquier función $f:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ tenemos $f^{-1}(Y) = X$ y $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, entonces, por (b) o (c) del teorema, f es continua.

($\Leftarrow$) Sea σ' la topología indiscreta para Y. De la hipótesis resulta que la función $1_Y:(Y,\sigma') \to (Y,\sigma)$ es continua, de manera que si $V \in \sigma$ entonces $1_Y^{-1}(V) \in \sigma'$; pero $1_Y^{-1}(V) = V$; $\therefore$ $\sigma \subseteq \sigma'$, y como $\sigma' \subseteq \sigma$, entonces (Y,σ) es indiscreto, como se quería probar.@

7. Sea (X,τ) un espacio topológico. Entonces (X,τ) es discreto si, y sólo si, toda función f de dominio (X,τ) cuyo codominio sea cualquier espacio topológico es continua.

($\Rightarrow$) Sean, (Y,σ) cualquier espacio topológico, $B \subseteq Y$ y $f:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ cualquier función. Como (X,τ) es discreto, entonces la familia de subconjuntos cerrados de X coincide con τ; por lo tanto, $f^{-1}(B)$ es cerrado en (X,τ). Por otra parte, sabemos que $B \subseteq \overline{B}$; $\therefore$ $f^{-1}(B) = \overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$. Por (e) del teorema anterior, f es continua.

($\Leftarrow$) Sea τ' la topología discreta para X. De la hipótesis resulta que la función $1_X : (X,\tau) \to (X,\tau')$ es continua; entonces $U = 1_X^{-1}(U) \in \tau, \forall U \in \tau'$; $\therefore$ $\tau' \subseteq \tau$, y como $\tau \subseteq \tau'$, entonces (X,τ) es discreto, como se quería demostrar.$_@$

8. La restricción de toda función continua es una función continua.

Sea $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ una función continua arbitraria. Si $A \subseteq X$ y $f(A) \subseteq B \subseteq Y$, entonces la restricción de la función f a A y B es la función

$$f\mid_A^B : (A,\tau \mid A) \to (B,\sigma \mid B) \,.\!\ni\!.\, f\mid_A^B(a) = f(a), \forall a \in A.$$

Para ver que es continua observemos que conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} (A,\tau \mid A) & \overset{f|_A^B}{\to} & (B,\sigma \mid B) \\ \iota_A \downarrow & & \downarrow \iota_B \\ (X,\tau) & \overset{f}{\to} & (Y,\sigma) \end{array}$$

En efecto, partiendo de $a \in A$, por uno de los caminos tenemos

$$a \overset{\iota_A}{\mapsto} a \overset{f}{\mapsto} f(a)$$

mientras que por el otro camino tenemos

$$a \overset{f|_A^B}{\mapsto} f(a) \overset{\iota_B}{\mapsto} f(a)$$

Por lo tanto, $f\iota_A = \iota_B f\mid_A^B$. Pero por el primer camino vamos de a a $f(a)$ através de una función continua; luego, $\iota_B f\mid_A^B$ es continua, de modo que, por el resultado del ejercicio 9, $f\mid_A^B$también es continua, que es a lo que se quería llegar.$_@$

9. Toda función constante es continua.

En efecto, si $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ es constante entonces, de acuerdo con la definición, tenemos que $\#(f(X)) \leq 1$. Sea $A \subseteq X$; si $A = \emptyset$, entonces $f(A) = f(\overline{A}) = \emptyset$; $\therefore$ $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$; si $A \neq \emptyset$, entonces $X \neq \emptyset$; $\therefore$ $\#(f(X)) = 1$, i.e. $f(X) = \{y_0\}$, p.a.$y_0 \in Y$; $\therefore$ $f(\overline{A}) = f(A)$, y como $f(A) \subseteq \overline{f(A)}$, entonces, por (d) del teorema anterior, f es continua.$_@$

Agosto 30 de 1985

<u>*Observación:*</u> Reconsideremos el ejemplo 8 para analizar el caso particular en que $B = Y$. En este caso la inclusión ι_B se convierte en la identidad 1_Y y el diagrama pasa del cuadrado de antes al siguiente triángulo conmutativo

$$\begin{array}{ccc} (A,\tau \mid A) & & \\ \iota \downarrow & \overset{f|A}{\searrow} & \\ (X,\tau) & \overset{f}{\to} & (Y,\sigma) \end{array}$$

Por lo tanto, $f \mid A = f\iota$; de manera que si $D \subseteq Y$, entonces

$$(f \mid A)^{-1}(D) = (f\iota)^{-1}(D) = \iota^{-1}\left(f^{-1}(D)\right) = A \cap f^{-1}(D) \ .$$

Definiciones. Una **cubierta** $\mathcal{A}$ de un conjunto X es una familia $(A_\lambda)_\Lambda$ de subconjuntos de X cuya unión $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = X$. Se dice que **la cubierta es finita** cuando Λ es finito.

$\mathcal{A}$ es una **cubierta** del espacio topológico (X,τ) si es cubierta de X. Se dice que $\mathcal{A}$ es **abierta** si cada $A_\lambda \in \tau$ y que $\mathcal{A}$ es **cerrada** si cada A_λ es cerrado.

Lema. Sean, $\mathcal{A}$ una cubierta de (X,τ) y $A \subseteq X$.

a) Si $\mathcal{A}$ es abierta y $A \cap A_\lambda$ es abierto para toda $\lambda \in \Lambda$, entonces A es abierto.

b) Si $\mathcal{A}$ es cerrada, finita y $A \cap A_\lambda$ es cerrado para toda $\lambda \in \Lambda$, entonces A es cerrado.

Demostración. Por la definición anterior tenemos

$$A = A \cap X = A \cap \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A \cap A_\lambda)$$

Por lo tanto:
(a) Si $A \cap A_\lambda \in \tau, \forall \lambda \in \Lambda$, entonces $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A \cap A_\lambda) \in \tau$; $\therefore A \in \tau$.
(b) Si $A \cap A_\lambda$ es cerrado $\forall \lambda \in \Lambda$ y Λ es finito, entonces $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A \cap A_\lambda)$ es cerrado.@

TEOREMA. Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ una función arbitraria. Si $\mathcal{A}$ es una cubierta arbitraria de (X, τ) tal que $f \mid A_\lambda$ es continua para toda $\lambda \in \Lambda$, entonces f es continua en los dos casos siguientes
(a) En el que $\mathcal{A}$ sea abierta.
(b) En el que $\mathcal{A}$ sea cerrada y finita.

Demostración. a) Sea $V \in \sigma$; entonces

$$f^{-1}(V) = X \cap f^{-1}(V) = \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) \cap f^{-1}(V) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \left(A_\lambda \cap f^{-1}(V) \right)$$

Debido a la observación anterior, $A_\lambda \cap f^{-1}(V) = (f \mid A_\lambda)^{-1}(V)$, y como para toda $\lambda \in \Lambda$ $f \mid A_\lambda : (A_\lambda, \tau \mid A_\lambda) \to (Y, \sigma)$ es continua, entonces $(f \mid A_\lambda)^{-1}(V) \in \tau \mid A_\lambda$. Pero $A_\lambda \in \tau, \forall \lambda \in \Lambda$, y como todo abierto relativo de un abierto absoluto es abierto absoluto, entonces $(f \mid A_\lambda)^{-1}(V) \in \tau, \forall \lambda \in \Lambda$. Luego, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \left(A_\lambda \cap f^{-1}(V) \right) \in \tau$. Por lo tanto f es continua.

b) Sea D un subconjunto cerrado en (Y, σ); entonces $f^{-1}(D) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \left(A_\lambda \cap f^{-1}(D) \right)$. Pero $A_\lambda \cap f^{-1}(D) = (f \mid A_\lambda)^{-1}(D)$ que es cerrado en A_λ porque $f \mid A_\lambda$ es continua; y como todo A_λ es cerrado absoluto, entonces todo $(f \mid A_\lambda)^{-1}(D)$ es cerrado en (X, τ). Luego $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \left(A_\lambda \cap f^{-1}(D) \right)$ es cerrada en (X, τ), (porque Λ es finito). Por lo tanto f es continua.@

Pudiera pensarse que las hipótesis que se piden en (b) son quizá demasiado restrictivas en lo referente a la exigencia de la finitud de la cubierta. El siguiente ejemplo muestra que esta exigencia es necesaria.

Pensemos en el espacio euclidiano bidimensional $(\mathbb{E}^2, \tau)$ con la topología usual. Una cubierta cerrada e infinita suya es

$$\mathcal{A} = \left\{ \{x\} : x \in \mathbb{E}^2 \right\}$$

Observemos que, sin que (Y, σ) sea necesariamente indiscreto, las restricciones $f \mid \{x\}$ de cualquier función $f : (\mathbb{E}^2, \tau) \to (Y, \sigma)$ (con σ no indiscreta para Y), son continuas porque las topología $\tau \mid \{x\}$ son discretas para todo $\{x\} \subseteq \mathbb{E}^2$. Inferir de esto que f es continua implicaría, en vista del ejemplo 7, que la topología usual de $\mathbb{E}^2$ es discreta, lo que es falso.@

Ejemplos: 1. Sea $f : \mathbb{E} \to [a, b]$ la función

$$f(x) = \begin{cases} a, \text{ si } x \leq a \\ x, \text{ si } a \leq x \leq b \\ b, \text{ si } x \geq b \end{cases}$$

Una cubierta cerrada y finita de $\mathbb{E}$ es

$$\mathcal{A} = \{(-\infty, a], [a, b], [b, \infty)\}$$

y tenemos que $f \mid (-\infty, a]$ y $f \mid [b, \infty)$ son continuas porque son constantes y que $f \mid [a, b]$ es continua porque coincide con la identidad en $[a, b]$. Por (b) del teorema anterior, f es continua.

2. Sea A un subconjunto abierto y cerrado de (X, τ) y $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ una función arbitraria. Entonces f es continua si $f \mid A$ y $f \mid (X - A)$ son continuas.

Septiembre 2 de 1985

Definiciones. Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ una función arbitraria.
(a) Se dice que **f es abierta** si f aplica conjuntos abiertos en conjuntos abiertos.
(b) Diremos que **f es cerrada** si aplica conjuntos cerrados en conjuntos cerrados.

LEMA. Sea $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ una función arbitraria. Si β es base de τ y $f(B) \in \sigma, \forall B \in \beta$, entonces f es abierta.

Demostración: Sea $U \in \tau$; entonces $U = \bigcup_{j \in J} B_j$, con $B_j \in \beta, \forall j \in J$. Luego

$$f(U) = \bigcup_{j \in J} f(B_j) \in \sigma, \text{ porque } f(B_j) \in \sigma, \forall j \in J$$

Por lo tanto f es abierta.@

Proposición. Sean, $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ una función y $A \subseteq X$, arbitrarios. Entonces:

(a) f es abierta $\Leftrightarrow f\left(\overset{\circ}{A}\right) \subseteq f^{\circ}(A)$.

(b) f es cerrada$\Leftrightarrow f\left(\overline{A}\right) \supseteq \overline{f(A)}$.

Demostración: (a) $(\Rightarrow)$ Como $\overset{\circ}{A} \subseteq A$, entonces $f\left(\overset{\circ}{A}\right) \subseteq f(A)$; pero además f es abierta. Luego $f\left(\overset{\circ}{A}\right)$ es un abierto contenido en $f(A)$; $\therefore f\left(\overset{\circ}{A}\right) \subseteq f^{\circ}(A)$.

$(\Leftarrow)$ Sea $A \in \tau$; entonces $f(A) = f\left(\overset{\circ}{A}\right)$, y como $f\left(\overset{\circ}{A}\right) \subseteq f^{\circ}(A)$, entonces $f^{\circ}(A) = f(A)$; $\therefore f(A) \in \sigma$; $\therefore f$ es abierta.

(b) $(\Rightarrow)$ Como $A \subseteq \overline{A}$, entonces $f\left(\overline{A}\right) \supseteq f(A)$; pero además f es cerrada. Luego $f\left(\overline{A}\right)$ es un cerrado que contiene a $f(A)$; $\therefore f\left(\overline{A}\right) \supseteq \overline{f(A)}$.

$(\Leftarrow)$ Sea A un cerrado en X; entonces $f(A) = f\left(\overline{A}\right)$, y como $f\left(\overline{A}\right) \supseteq \overline{f(A)}$, entonces $f(A) = \overline{f(A)}$; $\therefore f(A)$ es cerrado en Y; $\therefore f$ es cerrada.@

Proposición. Sean $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ y $g : (Y,\sigma) \to (Z,\varrho)$ dos funciones cualesquiera.

a) Si f y g son abiertas entonces gf es abierta.

b) Si f y g son cerradas entonces gf es cerrada.

c) Si f es biyectiva entonces: $\begin{cases} (i)\ f \text{ es abierta } \Leftrightarrow f^{-1} \text{ es continua} \\ (ii)\ f \text{ es cerrada } \Leftrightarrow f^{-1} \text{ es continua} \end{cases}$

Demostración: a) Sea $U \in \tau$. Como f es abierta, $f(U) \in \sigma$; y como también lo es g, $g(f(U)) \in \varrho$. Por lo tanto, gf es abierta.

b) Sea C un cerrado en (X,τ). Entonces $gf(C) = g(f(C))$; pero $f(C)$ es cerrado en (Y,σ). Luego $g(f(C))$ es cerrado en (Z,ϱ). Por lo tanto, gf es cerrada.

c) Por hipótesis f es biyectiva. Para evitar confundirnos con la imagen inversa denotaremos a la función inversa de f mediante f^*.

(i) $(\Rightarrow)$ Supongamos que f es abierta. Hay que probar que $f^* : (Y,\sigma) \to (X,\tau)$ es continua, es decir, que si $U \in \tau$ entonces $f^{*-1}(U) \in \sigma$. De acuerdo con la definición de imagen inversa,

$$f^{*-1}(U) = \{y \in Y : f^*(y) \in U\}$$

y como f es biyectiva, todo punto en Y es imagen de un único punto de X bajo f. Por lo tanto el conjunto anterior puede visualizarse como

$$\{f(x) : f^*(f(x)) \in U\}$$

y como f^* y f son mutuamente inversas, el conjunto anterior es

$$\{f(x) : x \in U\} = f(U)$$

y es miembro de σ porque f es abierta. Por lo tanto, f^* es continua.

$(\Leftarrow)$ Si suponemos ahora que f^* es continua, entonces para $U \in \tau$ tenemos $f^{*-1}(U) \in \sigma$. Pero, como acabamos de ver, $f^{*-1}(U) = f(U)$. Por lo tanto f es abierta.

(ii) La demostración es análoga.@

5.1 Secciones y Retracciones en Top. Homeomorfismos.

Definiciones. 1.Una **retracción en Top** ó **retracción** es una función continua que posee un inverso derecho continuo, es decir, es una función continua $r : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ para la cual existe otra función continua $s : (Y,\sigma) \to (X,\tau)$ tal que $rs = 1_{(Y,\sigma)}$.

2. Una **sección en Top** ó **sección** es una función continua que posee un inverso izquierdo continuo.
3. Un **homeomorfismo** es cualquier función que sea sección y retracción al mismo tiempo.

TEOREMA. Sea $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ una función arbitraria; son equivalentes:
(a) f es homeomorfismo.
(b) f es biyectiva, continua y f^{-1} es continua.
(c) f es biyectiva, continua y abierta.
(d) f es biyectiva, continua y cerrada.
(e) f es biyectiva y $f\left(\overline{A}\right) = \overline{f(A)}, \forall A \subseteq X$.

Demostración: $(a) \Rightarrow (b)$ Por hipótesis f es simultáneamente sección y retracción, luego, es continua y posee inversos continuos a derecha e izquierda; sean éstos g y h, respectivamente. Entonces tenemos

$$g = 1_{(X,\tau)} g = (hf)\, g = h\,(fg) = h 1_{(Y,\sigma)} = h$$

Por lo tanto, la función inversa de f existe y es continua, (a saber: $f^{-1} = g = h$). Por lo tanto, f es continua, biyectiva y de inversa continua.

$(b) \Rightarrow (c)$ Por hipótesis f ya es continua y biyectiva; para ver que es abierta tomemos cualquier $U \in \tau$. Por la continuidad de f^{-1}tenemos que $\left(f^{-1}\right)^{-1}(U) \in \sigma$; pero $\left(f^{-1}\right)^{-1}(U) = f(U)$. Por lo tanto f es abierta.

$(c) \Rightarrow (d)$ Sea C un cerrado en (X,τ). Entonces $X - C \in \tau$ y de la hipótesis se sigue que $f(X - C) \in \sigma$. Pero $f(X - C) = Y - f(C)$, porque f es biyectiva; luego, $f(C)$ es cerrado en (Y,σ). Por lo tanto f es cerrada.

$(d) \Rightarrow (e)$ Sea $A \subseteq X$; por hipótesis, además de biyectiva, f es continua—lo cual implica $f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$— y cerrada—que implica $f\left(\overline{A}\right) \supseteq \overline{f(A)}$. Por lo tanto f es biyectiva y $f\left(\overline{A}\right) = \overline{f(A)}$.

$(e) \Rightarrow (a)$ Si f es biyectiva y para todo $A \subseteq X$, $f\left(\overline{A}\right) = \overline{f(A)}$, entonces, además de biyectiva, f es cerrada y continua: Por ser biyectiva y cerrada, f^{-1} es continua. Luego, f^{-1} es un inverso continuo de f tanto derecho como izquierdo. Por lo tanto, f es sección y retracción al mismo tiempo, es decir, f es homeomorfismo.@

Septiembre 4 de 1985

COROLARIO. $a)$ $1_X : (X,\tau) \to (X,\tau)$ es un homeomorfismo.
$b)$ Si $(X,\tau) \xrightarrow{f} (Y,\sigma) \xrightarrow{g} (Z,\varrho)$ son homeomorfismos entonces gf es homeomorfismo.
$c)$ Si $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ es homeomorfismo entonces $f^{-1} : (Y,\sigma) \to (X,\tau)$ es homeomorfismo.
$d)$ Si $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ es un homeomorfismo y $A \subseteq X$, entonces $f\mid_A^{f(A)} : (A, \tau \mid A) \to (f(A), \sigma \mid f(A))$ es un homeomorfismo.

Demostración: $a)$$1_X$ es biyectiva, continua y $1_X^{-1} = 1_X$. Por (b) del teorema, 1_X es un homeomorfismo.

$b)$ f y g son biyectivas, continuas y abiertas, entonces gf es biyectiva continua y abierta; por lo tanto es un homeomorfismo.

$c)$ Si f es un homeomorfismo, entonces f^{-1} es biyectiva, continua y $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$ es continua. Por (b) del teorema f^{-1} es un homeomorfismo.

$d)$ Se sabe que $f\mid_A^{f(A)}$ es continua por serlo f; que es biyectiva se desprende de la biyectividad de f. Veremos que es abierta: Todo miembro de $\tau \mid A$ tiene la forma $A \cap U$, con $U \in \tau$; para cualquiera de tales miembros tenemos

$$f\mid_A^{f(A)} (A \cap U) = f(A \cap U) = f(U) \cap f(A) \in \sigma \mid f(A)$$

Por lo tanto $f\mid_A^{f(A)}$ es abierta y, por (c) del teorema, es un homeomorfismo.@

Definición. Sean (X,τ) y (Y,σ) dos espacios topológicos cualesquiera. Diremos que (X,τ) **es homeomorfo a** (Y,σ) si existe un homeomorfismo $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$. Notación:

$$(X,\tau) \cong (Y,\sigma) \text{ ó } (X,\tau) \overset{f}{\cong} (Y,\sigma) \text{ ó } f : (X,\tau) \cong (Y,\sigma)$$

<u>*Observación:*</u> A consecuencia del corolario anterior resulta que $\cong$ es una relación de equivalencia.

En efecto, por (a) del corolario, $(X,\tau) \cong (X,\tau)$; por lo tanto $\cong$ es reflexiva. Por (b), si $(X,\tau) \cong (Y,\sigma)$ y $(Y,\sigma) \cong (Z,\varrho)$ entonces $(X,\tau) \cong (Z,\varrho)$; por lo tanto $\cong$ es transitiva. Por (c), $(X,\tau) \cong (Y,\sigma)$ implica $(Y,\sigma) \cong (X,\tau)$; por lo tanto $\cong$ es simétrica.

Esto abre la posibilidad teórica de llevar a cabo una "clasificación en Top" vía homeomorfismos. Recuérdese que (en Set) dos conjuntos son indistinguibles (equivalentes) entre sí cuando existe una biyección entre ellos.

De igual manera, (en Top) no distinguiremos entre espacios homeomorfos; (X,τ) *y* (Y,σ) *serán vistos como un mismo espacio siempre que sean homeomorfos entre sí.*

Definiciones. Supóngase que P es una propiedad que poseen algunos espacios topológicos.

(a) Se dice que P es **topológica** si al poseerla (X,τ) la posee también cualquier otro espacio homeomorfo a (X,τ).

(b) P es **hereditaria** si el que (X,τ) tenga P implica que todo subespacio de (X,τ) tiene P.

(c) P es **productiva** cuando la poseción de P por cada miembro de la familia $(X_\lambda,\tau_\lambda)_\Lambda$ implica que $\prod_{\lambda\in\Lambda}(X_\lambda,\tau_\lambda)$ también la posee.

Ejemplos de espacios homeomorfos: 1. Si $f:\mathbb{E}\to\mathbb{E}$ es la función $f(x)=x+c$, p.a. $c\in\mathbb{R}$ fijo, entonces f es continua, existe f^{-1} dada por $f^{-1}(x)=x-c$ y, por ende, también f^{-1} es continua; por (b) del teorema, f es un homeomorfismo. Si hacemos $c=b-a$, entonces $f\mid_{(-\infty,a)}^{f(-\infty,a)}=f\mid_{(-\infty,a)}^{(-\infty,b)}$; por (d) del corolario, $(-\infty,a)\cong(-\infty,b)$. Si la restricción toma por dominio a $(-\infty,a]$, entonces $f(-\infty,a]=(-\infty,b]$; $\therefore(-\infty,a]\cong(-\infty,b]$. De las restricciones $f\mid_{(a,\infty)}^{(b,\infty)}$ y $f\mid_{[a,\infty)}^{[b,\infty)}$ se sigue que $(a,\infty)\cong(b,\infty)$ y $[a,\infty)\cong[b,\infty)$. Si, por otra parte, consideramos el homeomorfismo $g:\mathbb{E}\cong\mathbb{E}$ dado por $g(x)=-x$, entonces $g\mid_{(-\infty,0)}^{g(-\infty,0)}=g\mid_{(-\infty,0)}^{(0,\infty)}$; $\therefore(-\infty,0)\cong(0,\infty)$. Luego

$$(-\infty,a)\cong(-\infty,0)\cong(0,\infty)\cong(b,\infty)$$

Esto significa que en $\mathbb{E}$ cualesquiera dos semirrectas sin punto inicial son topológicamente equivalentes. Análogamente se prueba que en $\mathbb{E}$ cualesquiera dos semirrectas con punto inicial también son topológicamente equivalentes, o sea que $(-\infty,a]\cong[b,\infty)$.

2. Sean a,b,c,d números reales distintos, $a<b,c<d$, y sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función lineal tal que $f(a)=c$ y $f(b)=d$. Si $f(x)=\alpha x+\beta$, entonces

$$\left.\begin{array}{r}\alpha a+\beta=c\\ \alpha b+\beta=d\end{array}\right\}\Rightarrow\alpha=\frac{d-c}{b-a}>0$$

Por lo tanto f es creciente, biyectiva y continua; por ser creciente, aplica intervalos abiertos en intervalos abiertos, es decir, f es abierta. Por (c) del teorema, f es un homeomorfismo, y como $f(a,b)=(c,d)$, entonces, por (d) del corolario, $(a,b)\cong(c,d)$. Análogamente, $[a,b]\cong[c,d]$.

Septiembre 6 de 1985.

3. $\mathbb{E}\cong(-1,1)$ (con la topología usual).
Sea $f:\mathbb{E}\to(-1,1)$ la funión

$$f(x)=\frac{x}{1+|x|},\left(\therefore|f(x)|=\frac{|x|}{1+|x|}<1\right);$$

entonces f es continua (por ser el cociente de dos funciones continuas y tener divisor positivo). Sea $g:(-1,1)\to\mathbb{E}$ la función

$$g(y)=\frac{y}{1-|y|};$$

g es continua. Además $gf=1_{\mathbb{R}}$ ya que

$$x\overset{f}{\mapsto}\frac{x}{1+|x|}\overset{g}{\mapsto}\frac{\frac{x}{1+|x|}}{1-\left|\frac{x}{1+|x|}\right|}=x$$

Análogamente $fg=1_{(-1,1)}$. Por lo tanto f es retracción y sección, i.e. f es un homeomorfismo.@

Desde el punto de vista topológico, esto significa que no existe diferencia alguna entre la recta infinita y el intervalo abierto $(-1,1)$. *Puede decirse, por lo tanto, que este intervalo es una recta diminuta, (aunque limitada, infinita, sin principio y sin fin). Y lo propio acontece en el espacio euclidiano n-dimensional: en cada vecindad básica un universo en miniatura.*

4.Finalmente, como $f(-\infty,0)=(-1,0)$ y $f(-\infty,0]=(-1,0]$, entonces $(-\infty,0)\cong(-1,0)$ y $(-\infty,0]\cong(-1,0]$. En consecuencia, cualesquiera dos intervalos abiertos no vacíos son homeomorfos.

Sea X cualquier intervalo abierto no vacío.

Si $X=\mathbb{E}$, entonces $X\cong(-1,1)$;

Si $X=(-\infty,a)$, entonces $X\cong(-\infty,0)\cong(-1,0)\cong(-1,1)$;

Si $X=(a,\infty)$, entonces $X\cong(0,\infty)\cong(-\infty,0)\cong(-1,0)\cong(-1,1)$;

Si $X=(a,b)$, entonces $X\cong(-1,1)$. Por lo tanto todos son homeomorfos entre sí.@

Ejercicio: 10. (a) Sean τ y τ' dos topologías para X. Probar que $1_X:(X,\tau)\to(X,\tau')$ es continua si, y sólo si, $\tau'\subseteq\tau$.

(b) Sea (X,τ) cualquier espacio topológico y $A\subseteq X$. Se llama **función característica de A** a la función $c_A:(X,\tau)\to\mathbb{E}$ tal que

$$c_A(x)=\begin{cases}0, & \text{si } x\notin A\\ 1, & \text{si } x\in A\end{cases}$$

Probar que c_A es continua si, y sólo si, A es abierto y cerrado en (X,τ).

5.2 Topología inicial e inmersión topológica

Proposición. *a*) Sean, X un conjunto arbitrario, (Y,σ) un espacio topológico y $f:X\to Y$ cualquier función. Entonces la familia $\tau(f,\sigma)$ definida por

$$\tau(f,\sigma)=\left\{f^{-1}(V):V\in\sigma\right\}$$

es una topología para X.

b) $f:(X,\tau(f,\sigma))\to(Y,\sigma)$ es continua, y toda función $g:(Z,\varrho)\to(X,\tau(f,\sigma))$ tal que fg es continua, es continua.

c) $\tau(f,\sigma)$ es la única topología para X que satisface (*b*).

d) De las topologías de X, $\tau(f,\sigma)$ es la más pequeña para la cual f es continua.

Def. $\tau(f,\tau)$ es llamada **topología inicial correspondiente a f y σ.**

Demostración: *a*) Sea $\left(f^{-1}(V_i)\right)_I\subseteq\tau(f,\sigma)$; entonces $(V_i)_I\subseteq\sigma$ y tenemos:

(i) $\bigcup\limits_{i\in I}f^{-1}(V_i)=f^{-1}\left(\bigcup\limits_{i\in I}V_i\right)\in\tau(f,\sigma)$, porque $\bigcup\limits_{i\in I}V_i\in\sigma$.

(ii) Y si I es finito, $\bigcap\limits_{i\in I}V_i\in\sigma$; $\therefore f^{-1}\left(\bigcap\limits_{i\in I}V_i\right)=\bigcap\limits_{i\in I}f^{-1}(V_i)\in\tau(f,\sigma)$.

Por lo tanto, $\tau(f,\sigma)$ es una topología para X.

b) $f:(X,\tau(f,\sigma))\to(Y,\sigma)$ es continua porque si $V\in\sigma$ entonces $f^{-1}(V)\in\tau(f,\sigma)$, por definición de $\tau(f,\sigma)$. Además, si $g:(Z,\varrho)\to(X,\tau(f,\sigma))$ es una función tal que $fg:(Z,\varrho)\to(Y,\sigma)$ es continua, entonces para cualquier $f^{-1}(V)\in\tau(f,\sigma)$ tenemos:

$$g^{-1}\left(f^{-1}(V)\right)=(fg)^{-1}(V)\in\varrho.$$

Por lo tanto g es continua.

c) Sea τ' una topología para X tal que:

(1) $f:(X,\tau')\to(Y,\sigma)$ es continua; y

(2) la continuidad de cualquier función $g:(Z,\varrho)\to(X,\tau')$ se infiere de la continuidad de la composición $(Z,\varrho)\xrightarrow{g}(X,\tau')\xrightarrow{f}(Y,\sigma)$.

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}(X,\tau(f,\sigma)) & \xrightarrow{f} & (Y,\sigma)\\ 1_X\uparrow\downarrow 1_X & \nearrow_f & \\ (X,\tau') & & \end{array}$$

De (a), (b), (1) y (2) resultan continuas las funciones

$$(X,\tau(f,\sigma))\ \underset{\overleftarrow{1_X}}{\overset{1_X}{\rightarrow}}\ (X,\tau')$$

de modo que, por (a) del ejercicio 10, $\tau' = \tau(f,\sigma)$.

d) Si τ' es una topología para X tal que $f : (X,\tau') \to (Y,\sigma)$ es continua, entonces, debido a (*b*), $1_X : (X,\tau') \to (X,\tau(f,\sigma))$ es continua y, por (a) del ejercicio 10, $\tau(f,\sigma) \subseteq \tau'$, que es a lo que se quería llegar.$_{@}$

Para propósitos teóricos muy concretos resulta importante saber cuándo podemos obtener una réplica de X dentro de Y. Desde la perspectiva conjuntista esto se consigue cuando X es inyectable en Y, y solamente entonces. En efecto, si $f : X \to Y$ es una función inyectiva (una inyección), entonces $f(X)$ resulta ser un subconjunto de Y teóricamente idéntico (equivalente) a X. Recíprocamente, si X' es un subconjunto de Y equivalente a X entonces, por definición de equivalencia, existe una función $f : X \to X'$ que es biyectiva; como en particular es inyectiva, entonces al componer la inclusión $\iota : X' \to Y$ (inclusión en Set) con f obtenemos una inyección de X en Y.

Desde el punto de vista topológico esta cuestión se traduce en averiguar bajo qué condiciones es posible hallar un subespacio de (Y,σ) que sea equivalente a (X,τ). Desde luego, la existencia de la inyección $f : X \to Y$ sigue siendo condición necesaria pero los requerimientos topológicos exigen de f continuidad. Esto, sin embargo, aún resulta insuficiente; la función $1_X : (X,\tau_d) \to (X,\tau_i)$, por ejemplo, (donde τ_d y τ_i denotan a las topologías discreta e indiscreta) es continua e inyectiva pero no logra duplicar, por así decirlo, a (X,τ_d) dentro de (X,τ_i).

A fin de averiguar qué condiciones hacen falta supongamos que $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ es una inyección continua a través de la cual conseguimos duplicar o, para ser más correctos mejor es hablar de sumergir, a (X,τ) en (Y,σ). Esto quiere decir que $f\mid_{(X,\tau)}^{(f(X),\sigma \mid f(X))}$ es un homeomorfismo. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} (X,\tau) & \xrightarrow{f} & (Y,\sigma) \\ 1_X \downarrow\uparrow 1_X & \nearrow_f & \\ (X,\tau(f,\sigma)) & & \end{array}$$

La función $1_X : (X,\tau) \to (X,\tau(f,\sigma))$ es continua por (*b*) del teorema anterior; pero también lo es $1_X : (X,\tau(f,\sigma)) \to (X,\tau)$ por ser la composición

$$\left(f\mid_{(X,\tau)}^{(f(X),\sigma\mid f(X))}\right)^{-1}\left(f\mid_{(X,\tau(f,\sigma))}^{(f(X),\sigma\mid f(X))}\right)$$

En consecuencia tenemos que $\tau = \tau(f,\sigma)$.$_{@}$

Así, si suponemos que mediante una inyección continua f se consigue una inmersión de (X,τ) en (Y,σ), entonces la inicialidad de τ correspondiente a f y σ surge como una necesidad. Como veremos a continuación, la inyectividad de f aunada a la inicialidad de τ son condiciones suficientes para tener una ***inmersión topológica****.*

Corolario. Sean, X un conjunto arbitrario, (Y,σ) un espacio topológico y $f : X \to Y$ una función. Si f es inyectiva, entonces $f\mid_{(X,\tau(f,\sigma))}^{(f(X),\sigma\mid f(X))}$ es un homeomorfismo.

Demostración: Al ser f inyectiva, $f\mid_{(X,\tau(f,\sigma))}^{(f(X),\sigma\mid f(X))}$ es inyectiva y suprayectiva; también es continua, porque es restricción de la función

$$f : (X,\tau(f,\sigma)) \to (Y,\sigma)$$

que es continua. Como además el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} (f(X),\sigma\mid f(X)) & \xrightarrow{\left(f\mid_{(X,\tau(f,\sigma))}^{(f(X),\sigma\mid f(X))}\right)^{-1}} & (X,\tau(f,\sigma)) \\ \iota\searrow & \circlearrowright & \swarrow f \\ & (Y,\sigma) & \end{array}$$

entonces, por (*b*) del teorema anterior, $\left(f\mid_{(X,\tau(f,\sigma))}^{(f(X),\sigma\mid f(X))}\right)^{-1}$ es continua. Por lo tanto, $f\mid_{(X,\tau(f,\sigma))}^{(f(X),\sigma\mid f(X))}$ es un homeomorfismo.$_{@}$

Podemos resumir todo esto en un solo enunciado: Sean, X un conjunto y (Y,σ) un espacio topológico, arbitrarios. Son condiciones necesarias y suficientes para hallar un subespacio de (Y,σ) cuyo conjunto subyacente sea X que exista una inyección $f : X \to Y$ y que X sea topologizado con $\tau(f,\sigma)$.

Septiembre 9 de 1985.

Tercera tanda de ejercicios: 1. Sean, X un conjunto, τ la topología cofinita para X y $f:(X,\tau)\rightarrow(X,\tau)$ una función arbitraria. Probar que son equivalentes:

(a) f es continua.

(b) Si A es un subconjunto finito de X, entonces $f^{-1}(A)$ o es X o es finito.

2. Sean, (X,τ) un espacio topológico arbitrario y A un subconjunto de X no vacío pero de interior vacío. Encuentre una función $f:(X,\tau)\rightarrow\mathbb{E}$ que satisfaga lo siguiente:

(i) $f\mid A$ es continua.

(ii) f es discontinua en cada punto de A.

3. Sea $(X_\lambda,\tau_\lambda)_\Lambda$ una familia no vacía de espacios topológicos no vacíos. Probar que cada λ-proyección $P_\lambda:\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}(X_\lambda,\tau_\lambda)\rightarrow(X_\lambda,\tau_\lambda)$ es suprayectiva.

Proposición. Sea $(X_\lambda,\tau_\lambda)_\Lambda$ una familia no vacía de espacios topológicos. Entonces

(a) Toda λ-proyección es una función continua.

(b) Toda λ-proyección es una función abierta.

Demostración: (a) Se sabe que una función $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma)$ es continua si existe una subbase γ de σ y $f^{-1}(V)\in\tau,\forall V\in\gamma$. Ahora bien, por nuestra parte tenemos que si γ_λ es una subbase de τ_λ y $U_\lambda\in\gamma_\lambda$, por (b) del ejercicio 6, $P_\lambda^{-1}(U_\lambda)=[U_\lambda]$; pero $[U_\lambda]$ es elemento de la subbase que define a la topología de Tychonoff. Luego, $P_\lambda^{-1}(U_\lambda)$ es abierto en $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}(X_\lambda,\tau_\lambda)$. Por lo tanto, P_λ es una función continua.

(b) Se sabe que una función $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma)$ es abierta si existe una base β de τ y $f(B)\in\sigma$, $\forall B\in\beta$. Sea $\beta(\gamma)$ la base generada por

$$\gamma=\{[U_\lambda]:U_\lambda\in\tau_\lambda,\forall\lambda\in\Lambda\}$$

Como sabemos, los elementos de $\beta(\gamma)$ son de la forma

$$[U_{\lambda_1},..,U_{\lambda_n}]=\prod_{\lambda\in\Lambda}X'_\lambda,\text{ donde }X'_\lambda=\begin{cases}X_\lambda,\ \lambda\neq\lambda_i\\U_{\lambda_i},\ \lambda=\lambda_i\end{cases}\text{ y }U_{\lambda_i}\in\gamma,\forall i\in\{1,..,n\}$$

Entonces X'_λ es abierto cualquiera que sea λ, y como P_λ es suprayectiva (ejercicio 3) tenemos

$$P_\lambda[U_{\lambda_1},U_{\lambda_2},...,U_{\lambda_n}]=X'_\lambda,\forall\lambda\in\Lambda$$

Por lo tanto P_λ es abierta.@

TEOREMA. Sea $(X_\lambda,\tau_\lambda)_\Lambda$ una familia no vacía de espacios topológicos. Entonces, para cualquier familia $(g_\lambda:(Z,\varrho)\rightarrow(X_\lambda,\tau_\lambda))_\Lambda$ de funciones continuas existe una única función continua $g:(Z,\varrho)\rightarrow\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}(X_\lambda,\tau_\lambda)$ tal que $P_\lambda g=g_\lambda,\forall\lambda\in\Lambda$.

Demostración: Por la propiedad universal del producto cartesiano sabemos que existe una única función $g:Z\rightarrow\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ tal que $P_\lambda g=g_\lambda$. Esta función, por consiguiente, hace que conmute el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(Z,\varrho) \arrow[d, dashed, "g"'] \arrow[dr, "g_\lambda"] & \\
\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}(X_\lambda,\tau_\lambda) \arrow[r, "P_\lambda"] & (X_\lambda,\tau_\lambda)
\end{tikzcd}$$

Sólo falta demostrar su continuidad. Sea γ la subbase generadora de la topología de Tychonoff. En vista de la conmutatividad del diagrama, del resultado (b) del ejercicio 6 y de la continuidad de g_λ, para $[U_\lambda]\in\gamma$ tenemos

$$g^{-1}([U_\lambda])=g^{-1}\left(P_\lambda^{-1}(U_\lambda)\right)=(P_\lambda g)^{-1}(U_\lambda)=g_\lambda^{-1}(U_\lambda)\in\varrho$$

Por lo tanto g es continua.@

5.3 Propiedad Universal del Producto Topológico

Septiembre 11 de 1985.

Definición. Se dice que una familia no vacía de funciones continuas

$$(f_\lambda : (X,\tau) \to (X_\lambda, \tau_\lambda))_\Lambda$$

tiene la **propiedad universal del producto topológico** si para toda familia de funciones continuas $(g_\lambda : (Z,\varrho) \to (X_\lambda, \tau_\lambda))_\Lambda$ existe una función continua, y solamente una, $g : (Z,\varrho) \to (X,\tau)$ tal que $f_\lambda g = g_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda$.

Ejemplo: En vista del teorema anterior, la familia de λ-proyecciones

$$\left(P_\lambda : \prod_{\lambda \in \Lambda} (X_\lambda, \tau_\lambda) \to (X_\lambda, \tau_\lambda) \right)_\Lambda$$

tiene la propiedad universal del producto topológico.

Proposición. Si $(f_\lambda : (X,\tau) \to (X_\lambda, \tau_\lambda))_\Lambda$ tiene la propiedad universal del producto topológico, entonces $(f_\lambda : X \to X_\lambda)_\Lambda$ tiene la propiedad universal del producto cartesiano.

Demostración: Sea $(g_\lambda : Z \to X_\lambda)_\Lambda$ cualquier familia de funciones y supongamos que ϱ es la topología discreta de Z; entonces $g_\lambda : (Z,\varrho) \to (X_\lambda, \tau_\lambda)$ es continua, $\forall \lambda \in \Lambda$. Por consiguiente existe una única función continua $g : (Z,\varrho) \to (X,\tau)$ tal que $f_\lambda g = g_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda$. Debido a su unicidad, no es posible que otra función, digamos $g' : Z \to X$, satisfaga $f_\lambda g' = g_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda$, porque entonces $g' : (Z,\varrho) \to (X,\tau)$ sería continua y g ya no sería única. Esto prueba que $(f_\lambda)_\Lambda$ tiene la propiedad universal del producto cartesiano.@

El siguiente resultado muestra algún parecido con la propiedad característica de la topología inicial; este parecido no es casual. Más adelante veremos la esencial relación que existe entre la inicialidad de una familia de funciones continuas y la topología de Tychonoff.

Proposición. Si $(f_\lambda : (X,\tau) \to (X_\lambda, \tau_\lambda))_\Lambda$ tiene la propiedad universal del producto topológico, entonces toda función $g : (Z,\varrho) \to (X,\tau)$ tal que $f_\lambda g$ es continua $\forall \lambda \in \Lambda$, es continua.

Demostración: Por hipótesis, cada $f_\lambda g$ es continua; por lo tanto, si hacemos $g_\lambda = f_\lambda g$, entonces

$$(g_\lambda : (Z,\varrho) \to (X_\lambda, \tau_\lambda))_\Lambda$$

es una familia de funciones continuas. Como $(f_\lambda)_\Lambda$ tiene la propiedad universal del producto topológico, existe una única función continua $f : (Z,\varrho) \to (X,\tau)$ tal que $f_\lambda f = g_\lambda$. Pero, como vimos en la proposición anterior, $(f_\lambda)_\Lambda$ también posee la propiedad universal del producto cartesiano y $f : Z \to X$ es la única función para la cual $f_\lambda f = g_\lambda$; y como $g_\lambda = f_\lambda g$, entonces $f = g$. Por lo tanto g es continua,como se quería probar.@

Es de esperar que, como ocurre con la propiedad universal del producto cartesiano, también la propiedad universal del producto topológico caracterice tal producto. La siguiente proposición confirma esto.

Proposición. a) Si $(f_\lambda : (X,\tau) \to (X_\lambda, \tau_\lambda))_\Lambda$ tiene la propiedad universal del producto topológico y $h : (X',\tau') \to (X,\tau)$ es un homeomorfismo, entonces la familia $(f_\lambda h : (X',\tau') \to (X_\lambda, \tau_\lambda))_\Lambda$ también tiene la propiedad universal del producto topológico.

b) Si $(f_\lambda : (X,\tau) \to (X_\lambda, \tau_\lambda))_\Lambda$ y $(f'_\lambda : (X',\tau') \to (X_\lambda, \tau_\lambda))_\Lambda$ son familias que tienen la propiedad universal del producto topológico, entonces existe un único homeomorfismo $h : (X',\tau') \to (X,\tau)$ tal que $f_\lambda h = f'_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda$.

Demostración: a) Sea $(g_\lambda : (X'',\tau'') \to (X_\lambda, \tau_\lambda))_\Lambda$ cualquier familia de funciones continuas. Por la proposición que anteprecede a ésta y por ser h una función biyectiva, la familia $(f_\lambda h : X' \to X_\lambda)_\Lambda$ tiene la propiedad universal del producto cartesiano. Por lo tanto, existe una única función $g : X'' \to X'$ tal que $(f_\lambda h)\, g = g_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda$. Para terminar la prueba sólo falta mostrar que $g : (X'',\tau'') \to (X',\tau')$ es continua. Como cada g_λ lo es, entonces $f_\lambda\,(hg)$es continua para toda $\lambda \in \Lambda$, de modo que por la proposición anterior, $hg : (X'',\tau'') \to (X,\tau)$ es continua. Por otra parte, al ser h un homeomorfismo tenemos, por el recíproco del corolario anterior, que τ' es la topología inicial correspondiente a h y τ; pero hg es continua. Entonces, por la propiedad característica de la topología inicial, g es continua.

Septiembre 13 de 1985.

b) Por la proposición anteprecedente las familias

$$(f_\lambda : X \to X_\lambda)_\Lambda \quad \text{y} \quad (f'_\lambda : X' \to X_\lambda)_\Lambda$$

poseen la propiedad universal del producto cartesiano. Se sabe que existe una función, y solamente una, $h : X' \to X$ que es biyectiva y tal que $f_\lambda h = f'_\lambda$. Como cada f'_λ es continua y $(f_\lambda)_\Lambda$ posee la propiedad universal del producto topológico entonces, debido a la proposición anterior, h tiene que ser continua. Por razones análogas h^{-1} también resulta continua, pues $f'_\lambda h^{-1} = f_\lambda$. Por lo tanto, h es un homeomorfismo.@

Def. Al homeomorfismo h anterior se le llama **homeomorfismo natural**. Si

$$(f_\lambda : (X, \tau) \to (X_\lambda, \tau_\lambda))_\Lambda$$

es una familia con la propiedad universal del producto topológico, entonces se dice que (X, τ) **es un producto topológico de la familia $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ con proyecciones f_λ.**

$$\left(P_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} (X_\lambda, \tau_\lambda) \to (X_\lambda, \tau_\lambda)\right)_\Lambda$$

tiene la propiedad universal del producto topológico; por (b) se tiene el homeomorfismo natural

$$h : (X, \tau) \to \prod_{\lambda\in\Lambda} (X_\lambda, \tau_\lambda)$$

Ejercicio: 4. Sea $h : (X, \tau) \to (X', \tau')$ un homeomorfismo, sea α cualquier familia de subconjuntos de X, y sea

$$\alpha' = \{h(A) : A \in \alpha\}$$

Probar que:

i) α es base de $\tau \Leftrightarrow \alpha'$ es base de τ'

ii) α es subbase de $\tau \Leftrightarrow \alpha'$ es subbase de τ'

Ejemplo 1: Sean $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2), ..., (X_n, \tau_n)$ ene espacios topológicos no necesariamente distintos y consideremos el conjunto

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in X_i\}$$

Se sabe que es biyectiva la función

$$h : X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \to \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

$$\text{tal que } h(x_1, x_2, ..., x_n) = (\Lambda, f), \text{ con } f(i) = x_i, \forall i \in \Lambda = \{1, 2, ..., n\}$$

Si $\tilde{\tau}$ es la topología inicial correspondiente a h y τ, donde τ es la topología de Tychonoff para $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, entonces

$$h : (X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n, \tilde{\tau}) \to \left(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, \tau\right)$$

es un homeomorfismo.

En efecto, h es continua porque $U \in \tau \Rightarrow h^{-1}(U) \in \tilde{\tau}$ (por definición de topología inicial), y es abierta porque $\tilde{U} \in \tilde{\tau} \Rightarrow h\left(\tilde{U}\right) = h\left(h^{-1}(U)\right) = U$, p.a. $U \in \tau$. Luego, h es homeomorfismo.

Por otra parte, si γ_i es una subbase de τ_i y $G_i \in \gamma_i$ o $G_i = X_i$, entonces

$$\begin{aligned} h(G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n) &= \{h(g_1, g_2, ..., g_n) : g_i \in G_i\} \\ &= \{(\Lambda, f) : f(i) \in G_i\} \\ &= [G_1, G_2, ..., G_n]; \end{aligned}$$

y si $G_i = X_i, \forall i \neq j$ y $G_j \neq X_j$, entonces

$$h(G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n) = [G_j]$$

Por lo tanto, en virtud del resultado del ejercicio 4 tenemos que

$$\{G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n : G_i \in \gamma_i \text{ o } G_i = X_i\}$$

es una base de $\tilde{\tau}$, y que

$$\{X_1 \times \cdots \times X_{j-1} \times G_j \times X_{j+1} \times \cdots \times X_n : G_j \in \gamma_j\}$$

es una subbase de $\tilde{\tau}$.@

Septiembre 18 de 1985.

Ejercicio: 5. Sea $(f_\lambda : (X,\tau) \to (X_\lambda, \tau_\lambda))_\Lambda$ una familia de funciones continuas con la propiedad universal del producto topológico. Si $h : (X', \tau') \to (X, \tau)$ es una función continua, probar que $(f_\lambda h : (X', \tau') \to (X_\lambda, \tau_\lambda))_\Lambda$ tiene la propiedad universal del producto topológico si, y sólo si, h es un homeomorfismo.

Por el ejercicio 5, la familia de funciones continuas

$$(p_i h : (X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n, \tilde{\tau}) \to (X_i, \tau_i))_{1 \le i \le n}$$

tiene la propiedad universal del producto topológico. Por lo tanto

$$(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n, \tilde{\tau})$$

es un producto topológico de la familia $(X_i, \tau_i)_{1 \le i \le n}$ con proyecciones $p_i h$.

Ejercicio: 6. Si β_i es una base de τ_i, probar que

$$\{U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n : U_i \in \beta_i\}$$

es una base de $\tilde{\tau}$.

Por el ejercicio 6 tenemos que

$$\{U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n : U_i \in \tau_i\}$$

es una base de $\tilde{\tau}$.

Ejemplo 2: Sean $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2), ..., (X_{m+n}, \tau_{m+n})$ eme más ene espacios topológicos no necesariamente distintos. Por el ejemplo 1 se tienen los siguientes espacios topológicos:

$$(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{m+n}, \tilde{\tau}) \ldots\ldots (a)$$
$$(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_m, \tilde{\tau}_1) \ldots\ldots (b)$$
$$(X_{m+1} \times X_{m+2} \times \cdots \times X_{m+n}, \tilde{\tau}_2) \ldots\ldots (c)$$
$$((X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_m) \times (X_{m+1} \times X_{m+2} \times \cdots \times X_{m+n}), \tilde{\tau}_3) \ldots (d)$$

Sea

$$f : (X_1 \times \cdots \times X_{m+n}, \tilde{\tau}) \to ((X_1 \times \cdots \times X_m) \times (X_{m+1} \times \cdots \times X_{m+n}), \tilde{\tau}_3)$$

la función

$$f(x_1, x_2, ..., x_{m+n}) = ((x_1, x_2, ..., x_m), (x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_{m+n}))$$

f es biyectiva porque existe su inversa

$$f^{-1}((x_1, x_2, ..., x_m), (x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_{m+n})) = (x_1, x_2, ..., x_{m+n})$$

Veamos por qué es continua. Para $i \in \{1, 2, ..., m\}$ sean, γ_i una subbase de τ_i y $G_i \in \gamma_i$; por el ejemplo 1, $X_1 \times \cdots \times G_i \times \cdots \times X_m$ es un abierto subbásico del espacio (b), y si $j \in \{m+1, m+2, ..., m+n\}$, entonces $X_{m+1} \times \cdots \times G_j \times \cdots \times X_{m+n}$ es un abierto subbásico del espacio (c); por lo tanto, una subbase del espacio (d) es

$$\{(X_1 \times \cdots \times G_i \times \cdots \times X_m) \times (X_{m+1} \times \cdots \times X_{m+n}) : 1 \le i \le m\} \cup$$
$$\{(X_1 \times \cdots \times X_m) \times (X_{m+1} \times \cdots \times G_j \times \cdots \times X_{m+n}) : m+1 \le j \le m+n\}$$

Y tenemos

$$\begin{aligned}
& f^{-1}\left((X_1 \times \cdots \times G_i \times \cdots \times X_m) \times (X_{m+1} \times X_{m+2} \times \cdots \times X_{m+n})\right) \\
= \ & \left\{ f^{-1}\left((x_1, ..., x_i, ..., x_m), (x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_{m+n})\right) : x_i \in G_i \right\} \\
= \ & \left\{ (x_1, x_2, ..., x_{m+n}) : x_i \in G_i \right\} = X_1 \times \cdots \times G_i \times \cdots \times X_{m+n}
\end{aligned}$$

que es un abierto subbásico del espacio (a). Análogamente

$$\begin{aligned}
& f^{-1}\left((X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_m) \times (X_{m+1} \times \cdots \times G_j \times \cdots \times X_{m+n})\right) \\
= \ & X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_m \times X_{m+1} \times \cdots \times G_j \times \cdots \times X_{m+n}
\end{aligned}$$

que es otro abierto subbásico de (a). Por lo tanto f es continua. Además f es abierta porque aplica abiertos básicos en abiertos básicos; en efecto

$$f(G_1 \times \cdots \times G_{m+n}) = (G_1 \times \cdots \times G_m) \times (G_{m+1} \times \cdots \times G_{m+n})$$

Por lo tanto, f es un homeomorfismo.

$$\begin{array}{ccc}
(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{m+n}, \tilde{\tau}) & & \\
\downarrow f & & \\
(X_1 \times \cdot \cdot \times X_m, \tilde{\tau}_1) \times (X_{m+1} \times \cdot \cdot \times X_{m+n}, \tilde{\tau}_2) & \xrightarrow{q_2} & (X_{m+1} \times \cdot \cdot \times X_{m+n}, \tilde{\tau}_2) \\
\downarrow q_1 & & \downarrow p_i \\
(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_m, \tilde{\tau}_1) & & (X_i, \tau_i)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
(x_1, .., x_{m+n}) & \overset{f}{\longmapsto} & \left((x_1, .., x_m), (x_{m+1}, .., x_{m+n})\right) & \overset{q_2}{\longmapsto} & (x_{m+1}, .., x_{m+n}) \\
\downarrow p_i & & \downarrow q_1 & & \\
x_i & & (x_1, x_2, ..., x_m) & \overset{p_i}{\longmapsto} & x_i
\end{array}$$

[Ahorita nadie sabe que mañana va a temblar... !'y duro!]

Continuaremos la vez próxima.

Miércoles 25 de septiembre de1985.

Ejercicios: 7. Probar que toda sección $s : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ es una inmersión topológica, (i.e. s es inyectiva y τ es inicial respecto a s y σ).

8. a) Sean $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2), ..., (X_n, \tau_n)$ ene espacios topológicos y sea

$$(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n, \tilde{\tau})$$

un producto topológico de ellos. Probar que la función

$$s_i : (X_i, \tau_i) \to (X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n, \tilde{\tau})$$

dada por

$$s_i(x) = (x_1, ..., x_{i-1}, x, x_{i+1}, ..., x_n), \text{ donde } x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n \text{ son fijos}$$

es una sección, para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

b) Sea $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} (X_\lambda, \tau_\lambda)$ un producto topológico tal que $\Lambda \neq \emptyset$ y $X_\lambda \neq \emptyset, \forall \lambda \in \Lambda$. Probar que toda λ-proyección es una retracción.

Ejemplo 3: Consideremos el conjunto $\mathbb{E} \times \cdots \times \mathbb{E} = \mathbb{E}^n$ topologizado en el primer miembro con la topología $\tilde{\tau}$ del ejemplo 1 y en el segundo miembro con la topología usual τ. Tanto $(\mathbb{E} \times \cdots \times \mathbb{E}, \tilde{\tau})$ como $(\mathbb{E}^n, \tau)$ tienen el mismo conjunto subyacente, a saber, el conjunto de n-adas ordenadas de números reales. Veremos que también tienen la misma topología.

Por el resultado del ejercicio 6, $\tilde{\tau}$ tiene la base

$$\tilde{\beta} = \{(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n) : (a_i, b_i) \subseteq \mathbb{E}\}$$

Por otra parte sabemos que

$$\beta = \{D_\varepsilon(x) : x \in \mathbb{E}^n, \varepsilon > 0\}$$

es base de τ. Para alcanzar lo que se quiere probaremos que $\tilde{\beta} \subseteq \tau$ y que $\beta \subseteq \tilde{\tau}$.

Sea $A \in \tilde{\beta}$ y $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in A$; entonces $A = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ y $a_i < x_i < b_i, \forall i \in \{1, 2, ...n\}$. Sea $\varepsilon = \min\{x_i - a_i, b_i - x_i : i \in \{1, 2, ..., n\}\}$ y $x' \in D_\varepsilon(x)$, $x' = (x'_1, x'_2, ..., x'_n)$; entonces

$$[\rho(x, x')]^2 = \sum_{i=1}^{n} (x'_i - x_i)^2 < \varepsilon^2$$

Además si

$$|x'_j - x_j| = \max\{|x'_1 - x_1|, |x'_2 - x_2|, ..., |x'_n - x_n|\}$$

entonces

$$(x'_j - x_j)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} (x'_i - x_i)^2 < \varepsilon^2$$

$$\therefore |x'_j - x_j| < \varepsilon, \therefore x' \in (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n); \therefore D_\varepsilon(x) \subseteq A; \therefore \tilde{\beta} \subseteq \tau; \therefore \tilde{\tau} \subseteq \tau.$$

Ahora sea $\varepsilon > 0$ y $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$; entonces $D_\varepsilon(x) \in \beta$. Sea $x' \in D_\varepsilon(x)$, $x' = (x'_1, x'_2, ..., x'_n)$ y sea $\delta = \varepsilon - \rho(x, x')$. Veremos que

$$A = \left(x'_1 - \frac{\delta}{\sqrt{n}}, x'_1 + \frac{\delta}{\sqrt{n}}\right) \times \cdots \times \left(x'_n - \frac{\delta}{\sqrt{n}}, x'_n + \frac{\delta}{\sqrt{n}}\right) \subseteq D_\varepsilon(x)$$

Sea $x'' \in A$, $x'' = (x''_1, x''_2, ..., x''_n)$; entonces

$$x'_i - \frac{\delta}{\sqrt{n}} < x''_i < x'_i + \frac{\delta}{\sqrt{n}}, i.e. |x'_i - x''_i| < \frac{\delta}{\sqrt{n}};$$

$$\therefore (x'_i - x''_i)^2 < \frac{\delta^2}{n}; \therefore \rho(x', x'') < \delta$$

$$\therefore \rho(x, x'') \leq \rho(x, x') + \rho(x', x'') < \rho(x, x') + \delta = \rho(x, x') + \varepsilon - \rho(x, x') = \varepsilon$$

$$\therefore x'' \in D_\varepsilon(x); \therefore \forall x' \in D_\varepsilon(x) \exists A \in \tilde{\beta}. \ni. x' \in A \subseteq D_\varepsilon(x);$$

$$\therefore D_\varepsilon(x) \in \tilde{\tau}; \therefore \beta \subseteq \tilde{\tau}; \therefore \tau \subseteq \tilde{\tau}.$$

Esto demuestra que $\tilde{\tau} = \tau$, que es lo que se quería.@

[Ciudad conmocionada por efectos del sismo. Confusión; nada en su lugar. El grupo de topología, desperdigado; (hoy asistimos sólo dos de los trece alumnos que somos). Acordamos en vernos dentro de una semana esperando la reintegración de los demás. ...¡Qué no falten!]

Miércoles 2 de octubre de 1985.

Ejercicios: 9. Sea (X, τ) un espacio topológico arbitrario y supongamos que $X = A \cup B$ y que $x_0 \in A \cap B$. Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ una función tal que $f \mid A$ y $f \mid B$ resulten continuas. Probar que f es continua en x_0.

10. Sean $i_1, i_2, ..., i_m \in \mathbb{N}$ tales que $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_m \leq n$. Probar que es continua y abierta la función

$$f : \mathbb{E} \times \cdots \times \mathbb{E} \to \mathbb{E}^m . \ni . f(x_1, x_2, ..., x_n) = (x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_m})$$

Ejemplo 4: Considérese la función

$$h : \underbrace{\mathbb{E} \times \cdots \times \mathbb{E}}_{m+n \text{ factores}} \to \mathbb{E}^m \times \mathbb{E}^n . \ni . h(x_1, x_2, ..., x_{m+n}) = ((x_1, x_2, ..., x_m), (x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_{m+n}))$$

entonces h es un homeomorfismo natural.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}^m \times \mathbb{E}^n & \xrightarrow{q} & \mathbb{E}^n \\ p \downarrow & & \\ \mathbb{E}^m & & \end{array}$$

p y q son las proyecciones de $\mathbb{E}^m \times \mathbb{E}^n$ en $\mathbb{E}^m$ y en $\mathbb{E}^n$ resp.;

$$ph(x_1, x_2, ..., x_{m+n}) = (x_1, x_2, ..., x_m)$$
$$qh(x_1, x_2, ..., x_{m+n}) = (x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_{m+n})$$

h es biyectiva porque existe su función inversa

$$h^{-1}((x_1, x_2, ..., x_m), (x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_{m+n})) = (x_1, x_2, ..., x_{m+n}).$$

ph y qh son continuas y abiertas por el ejercicio 10. h es abierta porque

$$h(U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_{m+n}) = ((U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_m) \times (U_{m+1} \times U_{m+2} \times \cdots \times U_{m+n}))$$

es abierto en $\mathbb{E}^m \times \mathbb{E}^n$. Por lo tanto, h es un homeomorfismo natural.@

[Las cosas tienden lentamente a la "normalidad"; mucha gente fatigada. El mensaje presidencial: ⟨⟨entierren a sus muertos y apechuguen⟩⟩. *La asistencia en clase aumentó en uno; como sea, la semana próxima terminará el curso.]*

Octubre 7 de 1985.

Proposición. Sean $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2), ..., (X_n, \tau_n)$ ene espacios topológicos no necesariamente distintos y sea $A_i \subseteq X_i, \forall i \in \{1, 2, ...n\}$. Entonces:

a) $\overline{A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n} = \overline{A_1} \times \overline{A_2} \times \cdots \times \overline{A_n}$

b) $(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n)^\circ = \mathring{A}_1 \times \mathring{A}_2 \times \cdots \times \mathring{A}_n$

c) Para $n = 2$, $\partial(A_1 \times A_2) = (\partial A_1 \times \overline{A_2}) \cup (\overline{A_1} \times \partial A_2)$

Demostración: a) Se sabe que la función

$$h : X_1 \times \cdot \cdot \times X_n \to \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda . \ni . h(x_1, .., x_n) = (\Lambda, f) \text{ con } \Lambda = \{1, .., n\} \text{ y } f(i) = x_i$$

define un homeomorfismo

$$h : (X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n, \tilde{\tau}) \to \prod_{\lambda \in \Lambda} (X_\lambda, \tau_\lambda)$$

donde $\tilde{\tau}$ es la topología que tiene por base

$$\{U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n : U_i \in \tau_i\}$$

En consecuencia tenemos

$$h(\overline{A_1 \times \cdot \cdot \times A_n}) = \overline{h(A_1 \times \cdot \cdot \times A_n)} = \overline{\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda} = \prod_{\lambda \in \Lambda} \overline{A_\lambda} = h(\overline{A_1} \times \cdot \cdot \times \overline{A_n})$$

de donde se sigue lo que se quiere.

b) Se sabe que $\mathring{A}_i \in \tau_i$ y $\mathring{A}_i \subseteq A_i$; en consecuencia

$$\mathring{A}_1 \times \mathring{A}_2 \times \cdots \times \mathring{A}_n \in \tilde{\tau} \text{ y } \mathring{A}_1 \times \mathring{A}_2 \times \cdots \times \mathring{A}_n \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n;$$

por lo tanto

$$\mathring{A}_1 \times \mathring{A}_2 \times \cdots \times \mathring{A}_n \subseteq (A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n)^\circ$$

Por otra parte, si $(x_1, x_2, ..., x_n) \in (A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n)^\circ$, entonces para cierto abierto básico tendremos

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \in U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n;$$

por lo tanto $U_i \subseteq A_i$; y como $U_i \in \tau_i$, entonces $U_i \subseteq \mathring{A}_i, \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$. Por lo tanto

$$U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \subseteq \mathring{A}_1 \times \mathring{A}_2 \times \cdots \times \mathring{A}_n ; \therefore (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathring{A}_1 \times \mathring{A}_2 \times \cdots \times \mathring{A}_n$$

$$\therefore (A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n)^\circ \subseteq \mathring{A}_1 \times \mathring{A}_2 \times \cdots \times \mathring{A}_n$$

y se sigue lo que se quiere.

c) Se sabe que $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X - A}$; por consiguiente

$$\begin{aligned}
\partial (A_1 \times A_2) &= \overline{A_1 \times A_2} \cap \overline{(X_1 \times X_2) - (A_1 \times A_2)} \\
&= \overline{A_1 \times A_2} \cap \overline{[(X_1 - A_1) \times X_2] \cup [X_1 \times (X_2 - A_2)]} \\
&= \overline{A_1 \times A_2} \cap \left[\overline{(X_1 - A_1) \times X_2} \cup \overline{X_1 \times (X_2 - A_2)}\right] \\
&= \left[\left(\overline{A_1} \times \overline{A_2}\right) \cap \left(\overline{X_1 - A_1} \times X_2\right)\right] \cup \left[\left(\overline{A_1} \times \overline{A_2}\right) \cap \left(X_1 \times \overline{X_2 - A_2}\right)\right] \\
&= \left[\left(\overline{A_1} \cap \overline{X_1 - A_1}\right) \times \left(\overline{A_2} \cap X_2\right)\right] \cup \left[\left(\overline{A_1} \cap X_1\right) \times \left(\overline{A_2} \cap \overline{X_2 - A_2}\right)\right] {}^{1} \\
&= \left(\partial A_1 \times \overline{A_2}\right) \cup \left(\overline{A_1} \times \partial A_2\right) .@
\end{aligned}$$

Octubre 9 de 1985.

Definición: Si (X, τ) es un espacio topológico y $A \subseteq X$, diremos que **A es denso en X** si $\overline{A} = X$.

Ejemplo: $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{E}$; i.e. $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{E}$.

Proposición. Si (X, τ) es un espacio topológico cualquiera y $A \subseteq X$, entonces A es denso en X si, y sólo si, $U \cap A \neq \varnothing, \forall U \in \tau, U \neq \varnothing$.

Demostración: $\Rightarrow$) Sea $U \in \tau, U \neq \varnothing$ y sea $x \in U$; entonces $U \in \mathrm{N}_x$, y como $x \in X = \overline{A}$, entonces $U \cap A \neq \varnothing$.

$\Leftarrow$) Sea $x \in X$ y sea $U \in \mathrm{N}_x^\circ$; entonces $U \in \tau, U \neq \varnothing$; $\therefore U \cap A \neq \varnothing, \forall U \in \mathrm{N}_x^\circ$; $\therefore x \in \overline{A}$. Por lo tanto A es denso en X.@

Proposición. Sean $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2), ..., (X_n, \tau_n)$ ene espacios topológicos, y sea $A_i \subseteq X_i, \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$. Si cada A_i es denso en X_i, entonces $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ es denso en $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$.

Demostración: Por hipótesis $\overline{A_i} = X_i, \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$, de modo que por (a) de la proposición vista en la clase anterior tenemos

$$\overline{A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n} = \overline{A_1} \times \overline{A_2} \times \cdots \times \overline{A_n} = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$$

que es a lo que se quería llegar.@

Proposición. Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$, arbitrarios. Si $\partial A = X$, entonces A es denso en X.

Demostración: Si $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X - A} = X$, entonces $X \subseteq \overline{A}$; $\therefore \overline{A} = X$, i.e. A es denso en X.@

Observación: La frontera de un conjunto denso no necesariamente es todo el espacio; por ejemplo, si $\tau = \{X, A, \varnothing\}$, con $X \neq A \neq \varnothing$, entonces la familia de cerrados es $\Im = \{\varnothing, X - A, X\}$ y, por lo tanto A es denso en X. Sin embargo,

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{X - A} = X \cap (X - A) = X - A \neq X.@$$

Proposición. Si $\partial A_1 = X_1$ y $\partial A_2 = X_2$, entonces

$$\partial (A_1 \times A_2) = X_1 \times X_2$$

.

Demostración: Por (c) de la proposición de antier, por hipótesis y por el resultado anterior tenemos:

$$\partial (A_1 \times A_2) = \left(\partial A_1 \times \overline{A_2}\right) \cup \left(\overline{A_1} \times \partial A_2\right) = (X_1 \times X_2) \cup (X_1 \times X_2) = X_1 \times X_2.@$$

Como ejemplo consideremos en $\mathbb{R}$ los intervalos $(a, b]$ y $[c, d)$. Tenemos

$$(a, b] \times [c, d) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x \leq b, c \leq y < d\right\}$$

Por (a) de la proposición de antier

$$\overline{(a, b] \times [c, d)} = \overline{(a, b]} \times \overline{[c, d)} = [a, b] \times [c, d];$$

por (b)

$$[(a,b]\times[c,d)]^\circ=(a,b]^\circ\times[c,d)^\circ=(a,b)\times(c,d)\,;$$

y por (c)

$$\begin{aligned}\partial\,[(a,b]\times[c,d)] &= \Big(\partial(a,b]\times\overline{[c,d)}\Big)\cup\Big(\overline{(a,b]}\times\partial[c,d)\Big)\\ &= ([\{a\}\cup\{b\}]\times[c,d])\cup([a,b]\times[\{c\}\cup\{d\}])\\ &= (\{a\}\times[c,d])\cup(\{b\}\times[c,d])\cup([a,b]\times\{c\})\cup([a,b]\cup\{d\})\,.\end{aligned}$$

6

Topología Final, Identificación y Cociente

Noviembre 15 de 1985.

Proposición. a)Sean, (X,τ) un espacio topológico, Y un conjunto y $f:X\to Y$ una función arbitraria. Entonces la familia $(f,\tau)\,\sigma$ definida por

$$(f,\tau)\,\sigma=\left\{V\subseteq Y: f^{-1}(V)\in\tau\right\}$$

es una topología para Y.

b) $f:(X,\tau)\to(Y,(f,\tau)\,\sigma)$ es continua y toda función $g:(Y,(f,\tau)\,\sigma)\to(Z,\varrho)$ tal que gf es continua, es continua.

c) $(f,\tau)\,\sigma$ es la única topología para Y que satisface (b).

d) De las topologías de Y, $(f,\tau)\,\sigma$ es la más grande para la cual f es continua.

Def. $(f,\tau)\,\sigma$ se llama **topología final correspondiente a f y** τ.

Demostración: a) Sea $(V_i)_I\subseteq(f,\tau)\,\sigma$. Entonces:

(i) $f^{-1}\left(\bigcup\limits_{i\in I}V_i\right)=\bigcup\limits_{i\in I}f^{-1}(V_i)\in\tau$, porque toda $f^{-1}(V_i)\in\tau$ y τ es una topología.

(ii) Si I es finito, $f^{-1}\left(\bigcap\limits_{i\in I}V_i\right)=\bigcap\limits_{i\in I}f^{-1}(V_i)\in\tau$, porque τ es cerrada bajo intersecciones finitas.

Por lo tanto, $\bigcup\limits_{i\in I}V_i\in(f,\tau)\,\sigma$, y si I es finito, $\bigcap\limits_{i\in I}V_i\in(f,\tau)\,\sigma$. Por lo tanto, $(f,\tau)\,\sigma$ es una topología para Y.

b) $f:(X,\tau)\to(Y,(f,\tau)\,\sigma)$ es continua porque

$$V\in(f,\tau)\,\sigma\Rightarrow f^{-1}(V)\in\tau$$

por definición de topología final. Por otra parte, si $g:(Y,(f,\tau)\,\sigma)\to(Z,\varrho)$ es tal que gf es continua y $W\in\varrho$, entonces $g^{-1}(W)$ es un subconjunto de Y tal que

$$f^{-1}\left(g^{-1}(W)\right)=(gf)^{-1}(W)\in\tau$$

de modo que, por definición de topología final, $g^{-1}(W)\in(f,\tau)\,\sigma$. Por lo tanto, g es continua.

c) Supongamos que σ' es una topología para Y según la cual $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma')$ es continua y que toda función $g:(Y,\sigma')\to(Z,\varrho)$ tal que gf es continua, es continua. Entonces

$$1_Y:(Y,\sigma')\to(Y,(f,\tau)\,\sigma)$$

es continua, porque $1_Yf=f:(X,\tau)\to(Y,(f,\tau)\,\sigma)$ es continua. Pero también

$$1_Y:(Y,(f,\tau)\,\sigma)\to(Y,\sigma')$$

es continua, por (b) y porque estamos suponiendo que $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma')$ es continua. En consecuencia tenemos que $\sigma'=(f,\tau)\,\sigma$, que es a lo que se quería llegar.

d) Si σ' es cualquier topología para Y tal que $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma')$ es continua y $V'\in\sigma'$, entonces V'es un subconjunto de Y tal que $f^{-1}(V')\in\tau$; de la definición de topología final se sigue que $V'\in(f,\tau)\,\sigma$; $\therefore\ \sigma'\subseteq(f,\tau)\,\sigma$; por lo tanto $(f,\tau)\,\sigma$ es la más grande de las topologías de Y que hacen continua a f.@

Cuarta tanda de ejercicios: 1. Sea $f:(X,\tau)\to Y$ cualquier función y considérese la topología final $(f,\tau)\,\sigma$. Probar que si $B\subseteq Y-f(X)$, entonces $B\in(f,\tau)\,\sigma$.

Definición. Cuando f es suprayectiva, $(Y,(f,\tau)\,\sigma)$ recibe el nombre de **espacio cociente** y se habla de $f:(X,\tau)\to(Y,(f,\tau)\,\sigma)$ como de un **cociente**.

Noviembre 18 de 1985.

El lema que sigue es casi la definición de topología final, pero posee una ligera sutileza que será de utilidad en lo que viene.

LEMA. Sea $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ una función continua cualquiera; son equivalentes:

(a) σ es final respecto a f y τ.

(b) $V\in\sigma$ si $f^{-1}(V)\in\tau$.

Demostración: (a) $\Rightarrow$(b) Se sigue de la definición de topología final.

(b) $\Rightarrow$(a) Para $V\in(f,\tau)\,\sigma$ tenemos $f^{-1}(V)\in\tau$; por (b), $V\in\sigma$; $\therefore (f,\tau)\,\sigma\subseteq\sigma$. Pero f es continua; luego, $\sigma\subseteq(f,\tau)\,\sigma$; $\therefore \sigma=(f,\tau)\,\sigma$.@

Ejemplos: (*a*) Si $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ es continua y σ es la topología discreta, entonces σ es final respecto a f y τ.

(*b*) Sea $f:([0,1],\tau)\to\{0\}\cup\{1\}$ la función característica de $\left[\frac{1}{2},1\right]$, es decir

$$f\left[0,\tfrac{1}{2}\right)=\{0\}$$
$$f\left[\tfrac{1}{2},1\right]=\{1\}$$

La topología final con respecto a f y τ es por definición

$$(f,\tau)\,\sigma=\left\{V\subseteq\{0\}\cup\{1\}:f^{-1}(V)\in\tau\right\};$$

$$\therefore (f,\tau)\,\sigma=\{\{0\}\cup\{1\},\{0\},\varnothing\}$$

Aquí f es un cociente y la topología final resultante es especial para el espacio de dos puntos; se llama **topología de Sierpinski.**

Proposición. Sea $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ una función continua, suprayectiva y abierta; entonces f es un cociente.

Demostración: Hay que probar que σ es final respecto a f y τ. Sea $V\subseteq Y$ tal que $f^{-1}(V)\in\tau$. Como f es suprayectiva, $f\left(f^{-1}(V)\right)=V$; luego, $V\in\sigma$ porque f es abierta. Por (b) del lema, σ es la topología final. Por lo tanto, f es un cociente.@

Ejercicio: 2. Si $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ es continua, suprayectiva y cerrada, probar que f es un cociente.

Noviembre 25 de 1985.

Ya se habrá notado la dualidad que existe entre "lo inicial" y "lo final". Continuaremos con un resumen que realce esta dualidad.

Sean, $f:X\to Y$ una función arbitraria, τ y σ topologías para X y Y, respectivamente.

(*i*) τ es **inicial** respecto a f y σ si $\tau=\left\{f^{-1}(V):V\in\sigma\right\}$.

(*ii*) σ es **final** respecto a f y τ si $\sigma=\left\{V\subseteq Y:f^{-1}(V)\in\tau\right\}$.

(*iii*) τ es inicial respecto a f y σ ssi es la más pequeña de las topolgías en X para las cuales f es continua.

(*iv*) σ es final respecto a f y τ ssi es la más grande de las topologías en Y para las cuales f es continua.

(*v*) Si $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ es continua, son equivalentes:

(a) τ es inicial respecto a f y σ

(b) Una función $g:(Z,\varrho)\to(X,\tau)$ es continua si $fg:(Z,\varrho)\to(Y,\sigma)$ lo es.

(*vi*) Si $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ es continua, son equivalentes:

(a) σ es final respecto a f y τ

(b) Una función $g:(Y,\sigma)\to(Z,\varrho)$ es continua si $gf:(X,\tau)\to(Z,\varrho)$ lo es.

(*vii*) Una **inmersión** es una función continua e inyectiva $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ tal que τ es inicial respecto a f y σ.

(*viii*) Un **cociente** es una función continua y suprayectiva $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ tal que σ es final respecto a f y τ.

(*ix*) Toda sección es una inmersión.

Mas ejemplos: (ç) Toda retracción es un cociente.

En efecto, si $r:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ es una retracción, entonces es continua y existe $s:(Y,\sigma)\to(X,\tau)$ continua y tal que $rs=1_{(Y,\sigma)}$. r es suprayectiva porque para cualquier $y\in Y$, $s(y)\in X$ y $r(s(y))=y$. Para probar que σ es final respecto a r y τ nos valdremos del inciso (vi) del resumen anterior. Sea $g:(Y,\sigma)\to(Z,\varrho)$ una función tal que $gr:(X,\tau)\to(Z,\varrho)$ es continua; entonces también es continua la composición

$$(gr)\,s = g\,(rs) = g1_{(Y,\sigma)} = g$$

Por lo tanto, r es un cociente.@

Noviembre 27 de 1985.

(d) Sea $f:\mathbb{E}\to\mathbb{E}^2$ la función $f\,(t)=(\cos t, \text{sen } t)$; entonces f es continua porque lo son sus proyecciones

$$p_1 f\,(t) = \cos t$$
$$p_2 f\,(t) = \text{sen } t$$

Sea $p = f\mid^{S^1}:\mathbb{E}\to S^1$, donde

$$S^1 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\right\}$$

entonces p es continua y suprayectiva. También es abierta, ya que una base para la topología usual de $\mathbb{E}$ es

$$\beta = \{(a,b) : 0 < b-a < 2\pi\}$$

y para cualquier $B\in\beta$, $p\,(B)$ es un arco abierto de S^1, por lo tanto, un abierto de $\left(S^1,\tau\mid S^1\right)$. Así, p es continua, suprayectiva y abierta, i.e. p es un cociente.

Esta p es ejemplo de un tipo de funciones importantes en topología que se llaman *funciones cubrientes.* Si consideramos la restricción

$$p\mid[0,2\pi]:[0,2\pi]\to S^1$$

obtenemos una función continua y suprayectiva que es cerrada (lo cual probaremos luego) pero no es abierta.[@]

Definiciones. Sean, X un conjunto arbitrario y $\sim$ una relación de equivalencia en X. Denotemos a la familia de clases de equivalencia de $\sim$ como $X\ /\sim$. La **proyección canónica de la relación** $\sim$ es la función

$$p : X\to X\ /\sim\ .\ni.\ p\,(x) = [x]$$

donde $[x]$ denota la clase de equivalencia de x.

Si $f:X\to Y$ es cualquier función, **la relación de equivalencia en X definida por f,** $\sim_{\mathrm{f}}$, es

$$x\sim_f x' \Leftrightarrow f\,(x) = f\,(x')$$

Por ejemplo, $\sim_{\,p} = \sim$. Para cada $y\in Y$, **la fibra de f sobre y** es

$$f^{-1}\{y\} = \{x\in X : f\,(x) = y\}$$

Las clases de equivalencia de $\sim_f$son las fibras no vacías de f.

Proposición. Si la función $f:X\to Y$ es suprayectiva y $p:X\to X\ /\sim_f$ es la proyección canónica de la relación $\sim_f$, entonces existe una única función $g:X\ /\sim_f\to Y$ tal que $gp=f$; esta función es biyectiva y su inversa, g^{-1}, es la única función tal que $g^{-1}f=p$.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, dashed, shift right, "g^{-1}"'] & X\ /\sim_f \arrow[l, dashed, shift right, "g"'] \\
X \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "p"'] &
\end{tikzcd}$$

Demostración: Sea

$$g : X\ /\sim_f\to Y.\ni.\ g\,([x]) = f\,(x)$$

Entonces g es una función bién definida porque $f\,(x)$ es independiente de la elección de x en $[x]$; además

$$gp\,(x) = g\,([x]) = f\,(x)\,,\forall x\in X;\therefore gp = f$$

y si $g' : X \,/ \sim_f \to Y$ es cualquier función tal que $g'p = f$, entonces $g'p = gp$; pero entonces $g' = g$, porque p es suprayectiva. Así pues, g es única. También es inyectiva, porque

$$[x] \neq [x'] \Leftrightarrow f(x) \neq f(x')\,;$$

y suprayectiva, debido a la suprayectividad de f. Por lo tanto, g es biyectiva. En consecuencia, existe la función inversa de g, g^{-1}, que es única debido a la unicidad de g; y como $gp = f$, entonces $g^{-1}f = p$, con lo que la proposición está demostrada.@

Noviembre 29 de 1985.

Ejercicios: 3. a) Considérense las funciones $(X,\tau) \xrightarrow{f} (Y,\sigma) \xrightarrow{g} (Z,\varrho)$, donde σ es final respecto a f y τ y ϱ es final respecto a g y σ. Probar que ϱ es final respecto a gf y τ.
b) Sea $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ cualquier función; probar que son equivalentes:
b_1) f es un homeomorfismo
b_2) f es inmersión y cociente
4. Sea $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ cualquier función, y supóngase que σ es la topología final correspondiente a f y τ. Descríbase a σ cuando:
a) τ es discreta
b) τ es indiscreta.

6.1 Espacios de identificación

Definición. Sea (X,τ) un espacio topológico cualquiera. Si $\sim$ es una relación de equivalencia en X y $p : X \to X \,/ \sim$ es su proyección canónica, entonces **el espacio de identificación correspondiente a $\sim$** es $(X \,/ \sim, \tilde{\tau})$, donde $\tilde{\tau}$ es la topología final correspondiente a p y τ. En tal caso hablaremos de

$$p : (X,\tau) \to (X \,/ \sim, \tilde{\tau})$$

como de una **identificación**.

Proposición. Sea $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ un cociente arbitrario; entonces es un homeomorfismo la función

$$\begin{array}{rccc} g: & (X \,/ \sim_f, \tilde{\tau}) & \longrightarrow & (Y,\sigma) \\ & [x] & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Demostración: Se sabe que que g es biyectiva y que conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc} (Y,\sigma) & \underset{g^{-1}}{\overset{g}{\leftrightarrows}} & (X \,/ \sim_f, \tilde{\tau}) \\ f\uparrow & \underset{p}{\nearrow} & \\ (X,\tau) & & \end{array}$$

Por lo tanto, dada la continuidad de f y p, son continuas las composiciones gp y $g^{-1}f$. Entonces, debido al inciso (vi) del resumen anterior, g y g^{-1} son continuas. Por lo tanto, g es un homeomorfismo.@

Por esto, porque son homeomorfos, es que se suelen tomar como equivalentes el espacio de identificación y el espacio cociente.

Ejemplos: 1. Sea τ la topología usual de $\mathbb{E}$ y consideremos el subespacio

$$([0,2\pi]\,, \tau \mid [0,2\pi])\,;$$

sea $\sim$ la relación de equivalencia que hace $0 \sim 2\pi$ y $t \sim t$. ¿Cuál es el espacio de identificación correspondiente? Veamos: la función

$$f : [0,2\pi] \to S^1 \,.\ni.\, f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

es un cociente porque es continua, suprayectiva y cerrada (lo de cerrada tiene aún su demostración pendiente); además $\sim_f = \sim$. Luego, debido a la proposición anterior, el espacio de identificación es (homeomorfo a) S^1.

En general, si $[a,b] \subseteq \mathbb{E}$, con $a < b$, entonces el espacio de identificación que resulta de identificar a con b es S^1(salvo homeomorfismo).

En efecto, consideremos el homeomorfismo lineal

$$h : [a,b] \to [0,2\pi]\,,\ h(t) = \alpha t + \beta . \ni . h(a) = 0, h(b) = 2\pi$$

Entonces

$$\left.\begin{array}{r}\alpha a + \beta = 0\\ \alpha b + \beta = 2\pi\end{array}\right\}; \therefore \alpha = \frac{2\pi}{b-a} \text{ y } \beta = -\frac{2\pi}{b-a}a; \therefore h(t) = \frac{2\pi(t-a)}{b-a}$$

Entonces, por (a) y (b) del ejercicio 3, tenemos el cociente

$$fh : [a,b] \to S^1$$

del que resulta S^1 como espacio de identificación.@

2. Consideremos el subespacio de $\mathbb{E}^2$

$$\left(I^2, \tau \mid I^2\right), \text{ donde } I^2 = [0,1] \times [0,1]\,.$$

Sean, C (inicial de cilindro) el conjunto

$$C = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, 0 \leq x_3 \leq 1\right\}$$

y $f : I^2 \to C$ la función

$$f(s,t) = (\cos 2\pi s, \operatorname{sen} 2\pi s, t)\,;$$

f es un cociente porque es continua, suprayectiva y cerrada (demostración pendiente); por lo tanto, C es el espacio de identificación correspondiente a $\sim_f$. Nótese que para $0 < s < 1$, (s,t) sólo es equivalente a sí misma, mientras que para $s = 0$ ó $s = 1$, $(0,t) \sim_f (1,t)$.@

Continuaremos la vez próxima.

Lunes 2 de diciembre de 1985.

Ejercicio: 5. Si $f : X \to Y$ es suprayectiva y τ y σ son topologías para X y Y, respectivamente, probar que si τ es inicial respecto a f y σ entonces σ es final respecto a f y τ. Si σ es final respecto a f y τ, ¿es cierto que τ es inicial respecto a f y σ?

Ejemplo: 3. Sea

$$\begin{array}{rccc} p: & I & \longrightarrow & S^1 \\ & t & \longmapsto & (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t) \end{array}$$

y consideremos la función

$$\begin{array}{rccc} p \times p: & I \times I & \longrightarrow & S^1 \times S^1 \\ & (s,t) & \longmapsto & ((\cos 2\pi s, \operatorname{sen} 2\pi s), (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t)) \end{array} \quad [1]$$

$p \times p$ es continua porque lo son sus funciones componentes, es claro que es suprayectiva y además es cerrada (demostración pendiente); por lo tanto, es un cociente.

$$\therefore \left(I^2 / \sim_{p\times p}, \tilde{\tau}\right) \cong S^1 \times S^1 \cong \text{Toro bidimensional } \left(T^2\right).$$@

[1] Recuérdese la definición del producto cartesiano de una familia de funciones, y su descripción esencial, vistas en la clase del 14 de agosto.

7

Axiomas de Separación

Al hablar de separación en un espacio topológico nos referimos a la separación que podemos inducir entre los puntos del espacio valiéndonos de los conjuntos abiertos. En un espacio indiscreto, por ejemplo, esta separación es nula, pues para cualesquiera dos puntos es imposible hallar un abierto que contenga a uno de ellos sin contener al otro. No así en el **espacio de Sierpinski**

$$(S,\sigma)\,,\text{ donde } S=\{s_1,s_2\} \text{ y } \sigma=\{S,\{s_1\},\varnothing\}$$

ya que el abierto $\{s_1\}$ contiene a s_1 pero no a s_2.

Definición: Se dice que un espacio topológico es $\mathbf{T_0}$ si para cada par de puntos distintos existe un abierto que contenga a uno de los puntos y no al otro.

Proposición. Sea (X,τ) un espacio topológico arbitrario; son equivalentes:

a) (X,τ) es T_0

b) Si x y y son puntos distintos de X, entonces $\overline{\{x\}}\neq\overline{\{y\}}$.

Demostración: (a) $\Rightarrow$(b) Sean $x,y\in X$, $x\neq y$; por (a) existe $U\in\tau$ tal que $x\in U$ y $y\in X-U$; luego, $U\in\mathcal{N}_x^\circ$ y $U\cap\{y\}=\varnothing$; $\therefore x\notin\overline{\{y\}}$, y como $x\in\overline{\{x\}}$, entonces $\overline{\{x\}}\neq\overline{\{y\}}$.

(b) $\Rightarrow$(a) Sean $x,y\in X$, $x\neq y$; por (b) existe $z\in\overline{\{x\}}$ tal que $z\notin\overline{\{y\}}$; en consecuencia, existe $U\in\mathcal{N}_z^\circ$ tal que $U\cap\{x\}\neq\varnothing$ y $U\cap\{y\}=\varnothing$. Por lo tanto, (X,τ) es T_0.

Diciembre 4 de 1985.

Definición. Se dice que (X,τ) es un espacio $\mathbf{T_1}$ si para cada par de puntos distintos $x,y\in X$, existen $U,V\in\tau$ tales que $x\in U,x\notin V$ y $y\in V,y\notin U$.

Ejemplos de espacios T_0 y T_1: a) Todo espacio T_1 es T_0.

b) Sea (X,τ) un espacio topológico en el que τ es la topología cofinita, es decir

$$\tau=\{\varnothing\}\cup\{G\subseteq X : X-G \text{ es finito}\}$$

Entonces (X,τ) es T_1.

En efecto, si $x,y\in X$, $x\neq y$, entonces

$$x\in X-\{y\}=G_1 \quad\text{ y }\quad y\in X-\{x\}=G_2$$

y tanto G_1como G_2 son abiertos porque ambos tienen complementos finitos; además $x\notin G_2$ y $y\notin G_1$. Por lo tanto, (X,τ) es T_1.

Proposición. Sea (X,τ) un espacio topológico arbitrario; son equivalentes:

a) (X,τ) es T_1.

b) $\{x\}$ es cerrado en $(X,\tau)\,,\forall x\in X$.

c) Todo subconjunto de X es la intersección de la familia de abiertos que lo contienen.

Demostración: (a) $\Rightarrow$(b) Sea $x\in X$; si $y\neq x$, por (a) existe $V\in\tau$ tal que $y\in V\subseteq X-\{x\}$; luego $V\in\mathcal{N}_y^\circ$ y $V\cap\{x\}=\varnothing$; $\therefore y\notin\overline{\{x\}},\forall y\in X,y\neq x$. Luego, $\overline{\{x\}}=\{x\}$; por lo tanto, $\{x\}$ es cerrado en (X,τ).

(b) $\Rightarrow$(c) Sea $A\subseteq X$ y sea

$$V=\bigcap_{j\in J}V_j,\text{ donde } V_j\in\tau \text{ y } A\subseteq V_j,\forall j\in J;$$

entonces $A\subseteq V$. Sea $x\in V$ y supongamos que $x\in X-A$; entonces $A\subseteq X-\{x\}$ que es abierto porque, por (b), $\{x\}$ es cerrado. Entonces $X-\{x\}=V_j$, p.a. $j\in J$; $\therefore V\subseteq V_j$; $\therefore x\in X-\{x\}$ $\underset{\circ}{\nabla}$ Esta contradicción muestra que es falso suponer que $x \in X - A$; $\therefore A = V$, i.e. A es la intersección de todos los abiertos que lo contienen.

(c) $\Rightarrow$(a) Sean $x, y \in X$, $x \neq y$; por (c), $\{x\}$ es la intersección de todos los abiertos que lo contienen; por lo tanto, y no pertenece a todos los abiertos anteriores, i.e. existe $U \in \tau$ tal que $x \in U \subseteq X - \{y\}$. Análogamente se prueba que existe $V \in \tau$ tal que $y \in V \subseteq X - \{x\}$. Por lo tanto, (X, τ) es T_1.@

Definición. Decimos que un espacio topológico es $\mathbf{T_2}$ o **espacio de Hausdorff** si para cualesquiera dos elementos distintos $x, y \in X$ existen abiertos U y V tales que $x \in U, y \in V$ y $U \cap V = \varnothing$.

Ejemplos de espacios T_1 y T_2: a) Todo espacio T_2 es T_1.

b) $\mathbb{E}^n$ es T_2, $\forall n \in \mathbb{N}$, ya que si $x, y \in \mathbb{E}^n$, $x \neq y$ y $\varepsilon = \frac{1}{2}\rho(x, y)$, entonces

$$D_\varepsilon(x) \cap D_\varepsilon(y) = \varnothing$$

Hasta aquí sabemos que todo espacio T_2 es T_1 y que todo espacio T_1 es T_0. Los recíprocos, como es de esperar, no son ciertos. El espacio de Sierpinski es ejemplo de un espacio T_0 que no es T_1, y un ejemplo de espacio T_1 que no es T_2 lo da cualquier espacio infinito con la topología cofinita ya que si X es infinito y para todo par de puntos distintos existiesen sendos abiertos ajenos G_1 y G_2, entonces

$$X = X - \varnothing = X - (G_1 \cap G_2) = (X - G_1) \cup (X - G_2),$$

que resulta finito$\underset{\circ}{\nabla}$ .Por lo tanto el espacio no puede ser T_2.

Diciembre 9 de 1985.

Proposición. Sea (X, τ) un espacio topológico arbitrario. Son equivalentes:

a) (X, τ) es de Hausdorff.

b) La diagonal $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ es cerrada en $(X \times X, \tilde{\tau})$.

Demostración: (a) $\Rightarrow$(b) Sea $(x, y) \in (X \times X) - \Delta$; entonces $x \neq y$ y, por (a), existen $U, V \in \tau$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \varnothing$. Por lo tanto, $(x, y) \in U \times V$, que es abierto en $(X \times X, \tilde{\tau})$($\tilde{\tau}$ denota a la topología producto); además $U \times V \subseteq (X \times X) - \Delta$, ya que si $(x', y') \in U \times V$ entonces no puede ser $x' = y'$ pues de serlo tendríamos $U \cap V \neq \varnothing$, lo que es falso. Por lo tanto, $(X \times X) - \Delta$ es abierto en $(X \times X, \tilde{\tau})$, de donde resulta que Δ es cerrada.

(b) $\Rightarrow$ (a) Sean $x, y \in X$, $x \neq y$; entonces $(x, y) \in (X \times X) - \Delta$ que es abierto porque Δ es cerrada. En consecuencia, existen $U, V \in \tau$ tales que $(x, y) \in U \times V \subseteq (X \times X) - \Delta$; $\therefore x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \varnothing$. Por lo tanto, (X, τ) es de Hausdorff.@

Proposición. Sean, $f, g : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ dos funciones continuas cualesquiera y

$$A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$$

Si (Y, σ) es T_2 entonces A es cerrado en (X, τ).

Demostración: Sea $x \in X - A$; entonces $f(x) \neq g(x)$, y como (Y, σ) es T_2, existen $V_1, V_2 \in \sigma$ tales que $f(x) \in V_1$, $g(x) \in V_2$ y $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. Además f y g son continuas, de modo que $f^{-1}(V_1), g^{-1}(V_2) \in \mathcal{N}_x^\circ$; $\therefore f^{-1}(V_1) \cap g^{-1}(V_2) \in \mathcal{N}_x^\circ$, y como

$$f\left(f^{-1}(V_1) \cap g^{-1}(V_2)\right) \subseteq V_1 \text{ y } g\left(f^{-1}(V_1) \cap g^{-1}(V_2)\right) \subseteq V_2$$

entonces $f^{-1}(V_1) \cap g^{-1}(V_2) \subseteq X - A$; $\therefore X - A \in \tau$; por lo tanto, A es cerrado.@

Corolario. Sean $f, g : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ dos funciones continuas tales que $f \mid D = g \mid D$, donde D es denso en (X, τ); si (Y, σ) es T_2 entonces $f = g$.

Demostración: Como $f \mid D = g \mid D$, entonces $D \subseteq A$ (de la proposición anterior) que es cerrado. Luego,

$$X = \overline{D} \subseteq \overline{A} = A$$

Por lo tanto, $A = D$; por lo tanto, $f = g$.@

Lema. Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ una función continua e inyectiva. Si (Y, σ) es $T_i, i \in \{0, 1, 2\}$, entonces (X, τ).

Demostración: Sea $i = 0$, y sean $x, y \in X$, $x \neq y$. Como f es inyectiva, $f(x) \neq g(x)$;

$$\therefore \exists V \in \sigma . \ni . f(x) \in V \subseteq Y - \{f(y)\}$$

$$\therefore x \in f^{-1}(V) \subseteq X - \{y\}$$

Como f es continua, $f^{-1}(V) \in \tau$. Por lo tanto, (X, τ) esT_0. La prueba para los casos $i = 1, 2$ es análoga.@

Corolario. Si (X, τ) es $T_i, i \in \{0, 1, 2\}$, y $A \subseteq X$ entonces $(A, \tau \mid A)$ es T_i.

Demostración: Ya sabemos que la inclusión

$$\iota : (A, \tau \mid A) \to (X, \tau)$$

es una función continua e inyectiva. En consecuencia, del lema se desprende que si (X, τ) es T_i entonces también $(A, \tau \mid A)$es T_i.@

Diciembre 11 de 1985.

Corolario. Si $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ es continua y (Y, σ) es T_i, entonces $(X / \sim_f, \tilde{\tau})$ es T_i. [1]

Demostración: Se sabe que la función

$$\begin{array}{cccc} g: & (X / \sim_f, \tilde{\tau}) & \longrightarrow & (Y, \sigma) \\ & [x] & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

es un homeomorfismo cuando f es un cociente. Pero aquí f solamente es continua. Sin embargo, si $[x_1] \neq [x_2]$ entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$. Por lo tanto, g es inyectiva; de modo que, en vista del lema anterior, $(X / \sim_f, \tilde{\tau})$ es T_i si (Y, σ) es T_i.@

Teorema. Sea $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ una familia cualquiera de espacios topológicos. Son equivalentes:

(a) $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} (X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ es T_i, $(i = 0, 1, 2)$.

(b) $(X_\lambda, \tau_\lambda)$ es T_i, $\forall \lambda \in \Lambda$.

Demostración: $(a) \Rightarrow (b)$ Sea $\lambda \in \Lambda$ un elemento arbitrario; para cada $\lambda' \in \Lambda - \{\lambda\}$ sea $x_{\lambda'} \in X_{\lambda'}$ un elemento fijo. Sea $\varphi : (X_\lambda, \tau_\lambda) \to \prod\limits_{\lambda \in \Lambda} (X_\lambda, \tau_\lambda)$ la siguiente función:

$$\varphi(x) = (\Lambda, f), \text{ donde } f(\lambda') = \begin{cases} x, \text{ si } \lambda' = \lambda \\ x_{\lambda'}, \text{ si } \lambda' \neq \lambda \end{cases}$$

Entonces la composición $P_{\lambda'}\varphi$ coincide con la identidad en $(X_\lambda, \tau_\lambda)$, si $\lambda' = \lambda$, y con la constante de valor $x_{\lambda'}$, si $\lambda \neq \lambda'$. Cualquiera que sea el caso, esta composición es continua y, por la propiedad universal del producto topológico, también φ es continua[2]. Por otra parte, si $x, x' \in X_\lambda$ son puntos distintos, y $\varphi(x) = (\Lambda, f)$ y $\varphi(x') = (\Lambda, f')$, entonces $f(\lambda) = x \neq x' = f'(\lambda)$; $\therefore (\Lambda, f) \neq (\Lambda, f')$; por lo tanto, φ es inyectiva, de modo que por (a) y por el lema anterior, $(X_\lambda, \tau_\lambda)$ es T_i.

$(b) \Rightarrow (a)$ Sean $(\Lambda, f), (\Lambda, f') \in \prod\limits_{\lambda \in \Lambda} (X_\lambda, \tau_\lambda)$ tales que $(\Lambda, f) \neq (\Lambda, f')$; entonces existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $f(\lambda) \neq f'(\lambda)$. Sean $x, x' \in X_\lambda$, $x = f(\lambda)$ y $x' = f'(\lambda)$; por (b), si $i = 0$, existe $U \in \tau_\lambda$ tal que $x \in U \subseteq X_\lambda - \{x'\}$. Entonces $(\Lambda, f) \in P_\lambda^{-1}(U)$, que es abierto en $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} (X_\lambda, \tau_\lambda)$, y $(\Lambda, f') \notin P_\lambda^{-1}(U)$ porque $P_\lambda(\Lambda, f') = f'(\lambda) = x' \notin U$. Esto significa que $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} (X_\lambda, \tau_\lambda)$ es T_0. Análogamente se prueban los casos $i = 1, 2$.@

__Observación:__ Si $\Lambda = \varnothing$ la propiedad sigue cumpliéndose porque $\varnothing$ es T_i y $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} (X_\lambda, \tau_\lambda)$, que en este caso consta de un solo punto, también es T_i.

__Ejercicios:__ 6. Si (X, τ) es T_2 y $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ es un subconjunto de n puntos de X, probar que existen $U_1 \in \mathcal{N}^\circ_{x_1}, U_2 \in \mathcal{N}^\circ_{x_2}, ..., U_n \in \mathcal{N}^\circ_{x_n}$ tales que $U_i \cap U_j = \varnothing$, si $i \neq j$.

7. Demuestre que si (X, τ) es un espacio infinito de Hausdorff entonces posee un subespacio discreto y numerable infinito[3].

---

[1] No siempre una identificacón resulta T_i.

[2] Recuérdese el resultado enunciado en la segunda proposición vista en la clase del 11 de septiembre.

[3] Una copia de $\mathbb{N}$, como quien dice.

8

Fuentes

Diciembre 13 de 1985.

Definición. $a)$ Una **fuente de funciones (fuente en Set)** es una pareja $(X, (f_i)_I)$ en la que X es un conjunto arbitrario y $(f_i)_I$ una clase arbitraria de funciones $f_i : X \to X_i$. En tal caso, X recibe el nombre de **dominio de la fuente** y la clase $(X_i)_I$ de conjuntos el de **codominio de la fuente.**

$b)$ Si $\mathcal{F} = (X, (f_i)_I)$ es una fuente cuyo codominio es una familia $(X_i, \tau_i)_I$ de espacios topológicos, entonces la **topología inicial**[1] **para X correspondiente a $(\mathbf{f_i})_\mathbf{I}$ y a $(\tau_\mathbf{i})_\mathbf{I}$** es la topología τ generada por la familia

$$\gamma = \left\{ f_i^{-1}(U_i) : U_i \in \tau_i \right\}$$

Ejemplos: 1. Sea $\mathcal{F} = (X, (f_i)_I)$una fuente con un sólo miembro, i.e..$\ni$.$\#I = 1$ (digamos: $I = \{0\}$). Entonces la topología inicial correspondiente a $(f_i)_I$ y $(\tau_i)_I$ está generada por

$$\left\{ f_0^{-1}(U) : U \in \tau_0 \right\} = \tau(f_0, \tau_0);$$

por tanto, coincide con la inicial correspondiente a f_0 y τ_0.

2. Para mostrar que γ no necesariamente resulta una topología, consideremos $X = \{a, b, c\}$, $I = \{1, 2\}$, $(X_i, \tau_i) = \mathbb{R}$ con la topología usual y definamos $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ como:

$$\begin{aligned} f_1(a) &= 0, f_1(b) = f_1(c) = 1 \\ f_2(b) &= 0, f_2(a) = f_2(c) = 1 \end{aligned}$$

Entonces

$$f_1^{-1}\left(\frac{99}{100}, \frac{101}{100}\right) = \{b, c\} \in \gamma \quad \text{y} \quad f_2^{-1}\left(\frac{99}{100}, \frac{101}{100}\right) = \{a, c\} \in \gamma$$

Si γ fuese una topología, debería contener a $\{c\}$; pero es claro que $\{c\}$ no es preimagen bajo f_1 ni bajo f_2 de ningún abierto en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, γ no es una topología para X. Este ejemplo muestra también que γ tampoco es, en general, base para una topología de X, porque una base también debe ser cerrada bajo la formación de intersecciones finitas.

3. Si τ_i es indiscreta para toda $i \in I$, entonces

$$f_i^{-1}(U_i) = \begin{cases} X, \text{ si } U_i = X_i \\ \varnothing, \text{ si } U_i = \varnothing \end{cases} \forall i \in I$$

por lo que la topología inicial también resulta indiscreta.

4. Si cada f_i es constante de valor $x_i \in X_i$, entonces

$$f_i^{-1}(U_i) = \begin{cases} X, \text{ si } x_i \in U_i \\ \varnothing, \text{ si } x_i \notin U_i \end{cases}$$

por lo que también en este caso τ resulta indiscreta.

Teorema. Sea $\mathcal{F} = \left((X, \tau) \xrightarrow{f_i} (X_i, \tau_i)\right)_I$ una fuente arbitraria; son equivalentes:

(a) τ es inicial respecto a $(f_i)_I$ y a $(\tau_i)_I$

(b) τ tiene por subbase a

$$\gamma' = \left\{ f_i^{-1}(U_i) : U_i \in \gamma_i, \text{ subbase de } \tau_i \right\}$$

[1]También llamada **débil.**

(c) τ es tal que cada f_i es continua, y será continua toda función $g:(Z,\varrho)\to(X,\tau)$ tal que $f_i g:(Z,\varrho)\to(X_i,\tau_i)$ es continua, $\forall i\in I$.

(d) τ es la más pequeña de las topologías en X para las que cada f_i es continua.

Demostración: $(a)\Rightarrow(b)$ Sea τ' la topología para X generada por γ'. Como γ_i es subbase de τ_i, entonces $\gamma'\subseteq\gamma=\left\{f_i^{-1}(U_i):U_i\in\tau_i\right\}$, subbase de τ; $\therefore\ \tau'\subseteq\tau$. Para probar la contención en sentido contrario basta mostrar que todo miembro de γ es elemento de τ'. Para ello escojamos $U\in\beta(\gamma_i)$ arbitrario; entonces $U=\bigcap\limits_{j=1}^{n}U_j$, con $U_j\in\gamma_i$, $\forall j\in\{1,2,...n\}$; $\therefore\ f_i^{-1}(U_j)\in\gamma'$; $\therefore\ f_i^{-1}(U)\in\tau'$. Ahora bien, si $U_i\in\tau_i$, entonces $U_i=\cup U_k$, con $U_k\in\beta(\gamma_i)$; $\therefore\ f_i^{-1}(U_i)=\cup f_i^{-1}(U_k)\in\tau'$; $\therefore\ \tau\subseteq\tau'$. Esto demuestra que γ' es subbase de τ.

$(b)\Rightarrow(c)$ Claramente (b) implica la continuidad de cada f_i. Sea $g:(Z,\varrho)\to(X,\tau)$ tal que cada $f_i g$ es continua, y escojamos $V\in\gamma'$ arbitrariamente. Entonces $V=f_i^{-1}(U_i)$, con $U_i\in\gamma_i$, p.a. $i\in I$, y tenemos

$$g^{-1}(V)=g^{-1}\left(f_i^{-1}(U_i)\right)=(f_i g)^{-1}(U_i)\in\varrho$$

debido a la continuidad de $f_i g$. Por lo tanto, g es continua.

$(c)\Rightarrow(d)$ Por (c), τ es una de las topologías de X para las que cada f_i es continua. Sea τ' otra topología con la misma propiedad. Entonces es conmutativo el siguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc}(X,\tau') & \overset{f_i}{\to} & (X_i,\tau_i)\\ 1_X\downarrow & {}_{f_i}\nearrow & \\ (X,\tau) & & \end{array}$$

de lo cual resulta continua la composición $f_i 1_X$ y esto, debido a (c), implica la continuidad de $1_X:(X,\tau')\to(X,\tau)$, de donde $\tau\subseteq\tau'$, lo que significa que τ es la más chica de las topologías con tal propiedad.

$(d)\Rightarrow(a)$ Consideremos la subbase γ de la topología inicial correspondiente a $(f_i)_I$ y a $(\tau_i)_I$. Por hipótesis, cada $f_i:(X,\tau)\to(X_i,\tau_i)$ es continua; luego, cada miembro $f_i^{-1}(U_i)$ de γ es elemento de τ; por lo que $\tau(\gamma)\subseteq\tau$. Y como al topologizar X con $\tau(\gamma)$ cada f_i resulta continua y, por hipótesis, τ es la topología más chica con esta propiedad, entonces también $\tau\subseteq\tau(\gamma)$. Por lo tanto, $\tau(\gamma)=\tau$, lo que significa que τ es la topología inicial.@

<u>*Ejercicio:*</u> 8. Sea $\mathcal{F}=\left(X\overset{f_x}{\to}(S,\sigma)\right)_X$ una fuente en la que X es cualquier conjunto, (S,σ) es el espacio de Sierpinski y para cada $x\in X$

$$f_x(y)=\begin{cases}s_1, \text{ si } y\neq x\\ s_2, \text{ si } y=x\end{cases}$$

Probar que la topología inicial para X correspondiente a $(f_x)_X$ y σ es la topología cofinita.

Definición. Una **monofuente (en Set)** es una fuente $\mathcal{F}$ en la que cualesquiera dos puntos distintos de su dominio poseen imágenes distintas bajo al menos un miembro de la clase de funciones de $\mathcal{F}$.

<u>*Ejemplos:*</u> 1. Una función inyectiva es monofuente.

2. Cualquier fuente que contenga una función inyectiva es monofuente.

3. Si $\mathcal{F}=\left(X\overset{f_i}{\to}X_i\right)_I$ y $\mathcal{F}'=\left(X\overset{f_j}{\to}X_j\right)_J$ son fuentes tales que $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{F}'$ y $\mathcal{F}$ es monofuente, entonces $\mathcal{F}'$ también es monofuente.

Proposición. Sea $\mathcal{F}=(X,(f_i)_I)$ una fuente arbitraria. Son equivalentes:

$a)$ $\mathcal{F}$ es monofuente.

$b)$ Si $g,h:W\to X$ son funciones tales que $f_i g=f_i h$, $\forall i\in I$, entonces $g=h$[2].

Demostración: $(a)\Rightarrow(b)$ Sea $w\in W$ arbitrario. Por (a), si $g(w)\neq h(w)$ entonces existirá algún $i\in I$ tal que $f_i g(w)\neq f_i h(w)$. Pero por hipótesis tenemos que $f_i g(w)=f_i h(w)$, $\forall i\in I$; por lo tanto, $g(w)=h(w)$; y como w fue arbitrario, entonces $g=h$.

$(b)\Rightarrow(a)$ Utilizemos la proposición contrapuesta equivalente a (b); sean $x_1,x_2\in X$ dos puntos distintos y definamos

$$g,h:\{w\}\to X \text{ como } g(w)=x_1 \text{ y } h(w)=x_2$$

Entonces $g\neq h$; $\therefore\ \exists\ i\in I._\ni.f_i g\neq f_i h$; $\therefore\ f_i(x_1)\neq f_i(x_2)$; $\therefore\ \mathcal{F}$ es monofuente.@

[2]Cancelación por la izquierda.

Ejemplo: 4. Si $(X_\lambda)_\Lambda$ es cualquier familia de subconjuntos de un conjunto X, entonces

$$\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, (P_\lambda)_\Lambda\right)$$

es una monofuente[3]. Si además cada X_λ está topologizado con, digamos, τ_λ, entonces la topología inicial para $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ correspondiente a $(P_\lambda)_\Lambda$ y a $(\tau_\lambda)_\Lambda$ es la topología de Tychonoff[4].

8.1 Monofuentes de funciones continuas

Diciembre 16 de 1985.

Definición. *a*) Una **fuente de funciones continuas (fuente en Top)** es una pareja $((X,\tau),(f_i)_I)$ en la que (X,τ) es un espacio topológico cualquiera y $(f_i)_I$ es una clase arbitraria de funciones continuas $f_i : (X,\tau) \to (X_i,\tau_i)$. En tal caso, (X,τ) es el **dominio de la fuente** y $(X_i,\tau_i)_I$ es su **codominio**.

b) Se dice que $\mathcal{F} = ((X,\tau),(f_i)_I)$ es una **fuente inyectiva** o **monofuente** si para puntos distintos cualesquiera $x_1, x_2 \in X$ existe $i \in I$ tal que $f_i(x_1) \neq f_i(x_2)$.

A consecuencia de la proposición anterior tenemos el siguiente resultado de demostración análoga.

Corolario. Sea $\mathcal{F} = ((X,\tau),(f_i)_I)$ una fuente arbitraria de funciones continuas; son equivalentes:

a) $\mathcal{F}$ es monofuente.

b) Si $g, h : (Y,\sigma) \to (X,\tau)$ son funciones continuas tales que $f_i g = f_i h, \forall i \in I$, entonces $g = h$.

8.1.1 Propiedades de las monofuentes.

i) Sean $\mathcal{F} = \left(X \xrightarrow{f_i} X_i\right)_I$ y $\mathcal{F}' = \left(X \xrightarrow{f'_i} X'_i\right)_I$ dos fuentes arbitrarias y supongamos que

$$\forall i \in I \; \exists \; g_i : X_i \to X'_i \; .\ni. \; g_i f_i = f'_i$$

Entonces, $\mathcal{F}$ es monofuente si $\mathcal{F}'$ lo es.

ii) Sea $\mathcal{F} = \left(X \xrightarrow{f_i} X_i\right)_I$ una monofuente arbitraria. Si

$$\forall i \in I, \; \mathcal{F}_i = \left(X_i \xrightarrow{f_{ij}} X_{ij}\right)_{J_i}$$

es una monofuente, entonces

$$G = \left(X \xrightarrow{f_{ij} f_i} X_{ij}\right)_{\underset{i\in I}{\cup} J_i}$$

es otra monofuente.

Demostración:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[d, shift right, "g"'] \arrow[d, shift left, "h"] & & \\ X \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "f'_i"'] & \circlearrowleft & X_i \arrow[dl, "g_i"] \\ & X'_i & \end{tikzcd}$$

i) Supongamos que $g, h : W \to X$ son dos funciones tales que $f_i g = f_i h, \forall i \in I$. Entonces $g_i f_i g = g_i f_i h, \forall i \in I$, lo cual, por hipótesis, puede reescribirse como $f'_i g = f'_i h, \forall i$. Aplicando de ida y vuelta la proposición anterior tenemos: si $\mathcal{F}'$ es monofuente entonces $g = h$, lo cual implica que $\mathcal{F}$ también es monofuente, que es lo que había que demostrar.

[3]Revise la última proposición de la clase del 5 de agosto.

[4]Véase el inciso (b) del ejercicio 6 de la segunda tanda, o bien, la segunda proposición vista en la clase del 11 de septiembre y el comentario que la precede.

ii) Sean $g, h : W \to X$ funciones tales que

$$\begin{array}{ccccc} & & X_i & \overset{\mathcal{F}_i}{\rightrightarrows} & \begin{array}{c} X_{ij} \\ X_{ij'} \\ X_{ij''} \end{array} \\ & \nearrow & & & \\ X & \to & X_{i'} & \overset{\mathcal{F}_{i'}}{\rightrightarrows} & \begin{array}{c} X_{i'j} \\ X_{i'j'} \end{array} \\ & \searrow & & & \\ & & X_{i''} & \overset{\mathcal{F}_{i''}}{\rightrightarrows} & \begin{array}{c} X_{i''j} \\ X_{i''j'} \\ X_{i''j''} \end{array} \end{array}$$

$$(f_{ij} f_i)\, g = (f_{ij} f_i)\, h, \forall i \in I, \forall j \in J_i.$$

Fijemos un índice $i \in I$; entonces $f_{ij}(f_i g) = f_{ij}(f_i h), \forall j \in J_i$, lo que implica, dado que $\mathcal{F}_i$ es monofuente, que $f_i g = f_i h, \forall i \in I$, porque i es arbitraria; y como $\mathcal{F}$ es monofuente, la igualdad anterior implica que $g = h$. Por lo tanto, G también es monofuente, como se quería probar. @

Proposición. Sea $\mathcal{F} = ((X, \tau), (f_i)_I)$ una monofuente. Si todo miembro (X_i, τ_i) del codominio de $\mathcal{F}$ es T_j, ($j \in \{0, 1, 2\}$ fijo), entonces (X, τ) es T_j.

Demostración: Sea $j = 0$ y sean $x_1, x_2 \in X$ dos puntos distintos. Como $\mathcal{F}$ es monofuente, existe $i \in I$ tal que $f_i(x_1) \neq f_i(x_2)$, y como (X_i, τ_i) es T_0, existe $U_i \in \tau_i$ tal que

$$f_i(x_1) \in U_i \subseteq X_i - \{f_i(x_2)\}$$

Entonces $f_i^{-1}(U_i) \in \tau$, y tenemos:

$$x_1 \in f_i^{-1}(U_i) \subseteq X - \{x_2\}$$

Por lo tanto, (X, τ) es T_0. Análogamente se prueba para $j = 1, 2$.@

8.2 Teorema de factorización

Diciembre 18 de 1985.

<u>TEOREMA.</u> [Factorización (cocientes monofuentes) en Topología]

EXISTENCIA: Para toda fuente $\mathcal{F} = ((X, \tau), (f_i)_I)$ existen un cociente $c : (X, \tau) \to (X', \tau')$ y una monofuente $\mathcal{F}' = \left((X', \tau'), (f_i')_I\right)$ tales que $f_i = f_i' c, \forall i \in I$, lo que denotaremos como $\mathcal{F} = \mathcal{F}' \circ c$.

UNICIDAD: Si $\mathcal{F} = \mathcal{F}' \circ c$ y $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1' \circ c_1$, donde

$$c : (X, \tau) \to (X', \tau') \text{ y } c_1 : (X, \tau) \to (X_1', \tau_1')$$

son cocientes, y

$$\mathcal{F}' = ((X', \tau'), (f_i')_I) \text{ y } \mathcal{F}_1' = ((X_1', \tau_1'), (f_{1i}')_I)$$

monofuentes, entonces existen homeomorfismos

$$(X', \tau') \underset{h_1}{\overset{h}{\rightleftarrows}} (X_1', \tau_1')$$

tales que $hc = c_1$ y $h_1 c_1 = c$.

<u>*Demostración de la existencia:*</u> Sea $\sim_{\mathcal{F}}$ la relación de equivalencia

$$x_1 \sim_{\mathcal{F}} x_2 \Leftrightarrow f_i(x_1) = f_i(x_2), \forall i \in I$$

y sea c la proyección canónica de la relación $\sim_{\mathcal{F}}$

$$\begin{array}{ccc} (X, \tau) & \underset{c}{\to} & (X / \sim_{\mathcal{F}}, \tilde{\tau}) \\ x & \mapsto & [x] \end{array}$$

Sabemos que c es un cociente. Si ahora definimos para cada $i \in I$

$$f_i' : (X / \sim_{\mathcal{F}}, \tilde{\tau}) \to (X_i, \tau_i) \text{ como } f_i'[x] = f_i(x)$$

entonces cada f_i' es una función bien definida porque $f_i(x)$ no depende de la elección de x en $[x]$. En consecuencia tenemos:

$$f_i' c(x) = f_i'[x] = f_i(x), \forall x \in X; \forall i \in I, \therefore f_i' c = f_i$$

y como cada f_i es continua y c es un cociente, entonces cada f'_i es continua. Además, si $[x_1], [x_2] \in X / \sim_{\mathcal{F}}$ son clases distintas, entonces $x_1 \not\sim_{\mathcal{F}} x_2$, por lo que existe $i \in I$ tal que $f_i(x_1) \neq f_i(x_2)$; pero entonces, $f'_i[x_1] \neq f'_i[x_2]$, para esa misma i. Por lo tanto,

$$\mathcal{F}' = ((X / \sim_{\mathcal{F}}, \tilde{\tau}), (f'_i)_I)$$

es una monofuente para la cual $\mathcal{F} = \mathcal{F}' \circ c$.

<u>*Demostración de la unicidad:*</u> Ya tenemos $\mathcal{F} = \mathcal{F}' \circ c$ para el cociente y la monofuente de la primera parte de la demostración. Supongamos que también $\mathcal{F} = \mathcal{F}'_1 \circ c_1$ para el cociente $c_1 : (X, \tau) \to (X'_1, \tau'_1)$ y la monofuente $\mathcal{F}'_1 = \left((X'_1, \tau'_1), (f'_{1i})_I\right)$. Hay que probar que existen homeomorfismos

$$(X / \sim_{\mathcal{F}}, \tilde{\tau}) \underset{h_1}{\overset{h}{\rightleftarrows}} (X'_1, \tau'_1)$$

tales que $hc = c_1$, $h_1 c_1 = c$, y que para toda $i \in I$, $f'_{1i} h = f'_i$ y $f'_i h_1 = f'_{1i}$. Se sabe que el espacio cociente (X'_1, τ'_1) es homeomorfo al espacio de identificación $(X / \sim_{c_1}, \tilde{\tau}_1)$ en el que $\tilde{\tau}_1$ es la topología final correspondiente a la proyección canónica $p : X \to X / \sim_{c_1}$ y a τ.[5] Si demostráramos que $\sim_{c_1} = \sim_{\mathcal{F}}$ entonces p y c coincidirían y $(X / \sim_{c_1}, \tilde{\tau}_1)$ y $(X / \sim_{\mathcal{F}}, \tilde{\tau})$ representarían el mismo espacio. Veamos que así acontece: En efecto, como por hipótesis $f_i = f'_{1i} c_1, \forall i \in I$, entonces al ser $x_1 \sim_{c_1} x_2$ tendremos

$$f_i(x_1) = f'_{1i}(c_1(x_1)) = f'_{1i}(c_1(x_2)) = f_i(x_2), \forall i \in I; \text{ i.e. } x_1 \sim_{\mathcal{F}} x_2.$$

Y si $x_1 \sim_{\mathcal{F}} x_2$, entonces

$$f'_{1i}(c_1(x_1)) = f_i(x_1) = f_i(x_2) = f'_{1i}(c_1(x_2)), \forall i \in I$$

lo cual implica, dado que $\mathcal{F}'_1$ es monofuente, que $c_1(x_1) = c_1(x_2)$, o sea, que $x_1 \sim_{c_1} x_2$. Por lo tanto, $\sim_{c_1} = \sim_{\mathcal{F}}$; por lo tanto existen homeomorfismos h y h_1 que vuelven conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} (X'_1, \tau'_1) \arrow[r, shift right, leftarrow, "h"'] \arrow[r, shift left, "h_1"'] & (X / \sim_{\mathcal{F}}, \tilde{\tau}) \\ (X, \tau) \arrow[u, "c_1"] \arrow[ur, "c"'] & \end{tikzcd}$$

Además, para cada $i \in I$ tenemos

$$f'_i h_1 c_1 = f'_i c = f_i = f'_{1i} c_1 = f'_{1i} hc$$

de lo cual se desprende, dada la suprayectividad de c y c_1, que $f'_{1i} = f'_i h_1$ y que $f'_i = f'_{1i} h$, y el teorema queda demostrado.@

<u>COROLARIO:</u> Para cada espacio topológico (X, τ) existe una función continua $r_j : (X, \tau) \to (X', \tau')$ tal que:

(i) (X', τ') es T_j, $(j = 0, 1, 2)$.

(ii) Si $f : (X, \tau) \to (X'', \tau'')$ es cualquier función continua con $(X'', \tau'') \in T_j$, entonces existe una única función continua $f' : (X', \tau') \to (X'', \tau'')$ tal que $f' r_j = f$.

La función r_j se llama **$\mathbf{T_j}$-reflexión de $(\mathbf{X}, \tau)$**.

Demostración: Sea $\mathcal{F} = ((X, \tau), (f_i)_I)$ la fuente de todas las funciones continuas de dominio (X, τ) y codominio en T_j; por el teorema tenemos la factorización $\mathcal{F}' \circ c = \mathcal{F}$, en la que c es la proyección canónica $c : (X, \tau) \to (X / \sim_{\mathcal{F}}, \tilde{\tau})$ y $\mathcal{F}'$ la monofuente $\mathcal{F}' = \left((X / \sim_{\mathcal{F}}, \tilde{\tau}), (f'_i)_I\right)$. Por lo tanto, todo miembro (X_i, τ_i) del codominio de $\mathcal{F}'$ es T_j; luego, debido a la proposición anterior, también $(X / \sim_{\mathcal{F}}, \tilde{\tau})$ es T_j. Sea $r_j = c$; si $f : (X, \tau) \to (X'', \tau'')$ es continua y (X'', τ'') es T_j, entonces $f = f_i$, p.a. $i \in I$, y tenemos $f_i = f'_i c$, o sea que existe $f' : (X / \sim_{\mathcal{F}}, \tilde{\tau}) \to (X'', \tau'')$ continua y tal que $f' r_j = f$ y es única debido a la suprayectividad de r_j.@

[5]Véase la proposición vista en la clase del 29 de noviembre.

8.2.1 DESCRIPCIÓN DE LA T_0-REFLEXIÓN.

Diciembre 20 de 1985.

Por el corolario anterior sabemos que la T_0-reflexión de un espacio topológico (X,τ) es la aplicación canónica $r_0 : (X,\tau) \to (X / \sim_F, \tilde{\tau})$, donde F es la fuente de todas las funciones continuas de dominio (X,τ) y codominio en T_0. Para una descripción completa de r_0 hace falta especificar su regla de correspondencia, lo cual se traduce en describir $[x]$, para cada $x \in X$. Obsérvese que esto es lo mismo que determinar las fibras de r_0, ya que, para cualquier $[x] \in X / \sim_F$ la fibra

$$\begin{aligned} r_0^{-1}\{[x]\} &= \{y \in X : r_0(y) \in \{[x]\}\} \\ &= \{y \in X : [y] = [x]\} \\ &= \{y \in X : y \sim_F x\} = [x] \end{aligned}$$

Proposición. Sea $(A_i)_I$ una familia cualquiera de subespacios indiscretos de (X,τ) y supongamos que $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \varnothing$. Entonces $\bigcup_{i\in I} A_i$ también es un subespacio indiscreto.

Demostración: Sea $A = \bigcup_{i\in I} A_i$; hay que probar que los únicos abiertos en $\tau \mid A$ son A y $\varnothing$. Si $U \in \tau$ y $U \cap A = \varnothing$, entonces $\varnothing \in \tau \mid A$. Sea $U \in \tau$ tal que $U \cap A \neq \varnothing$; en consecuencia $U \cap A_i \neq \varnothing$, p.a. $i \in I$. Entonces $U \cap A_i$ es un abierto no vacío en $\tau \mid A_i$ que es indiscreta; luego, $U \cap A_i = A_i$; $\therefore A_i \subseteq U$. Y como $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \varnothing$, entonces $U \cap A_i \neq \varnothing, \forall i \in I$; $\therefore A_i \subseteq U, \forall i \in I$; $\therefore A \subseteq U$; $\therefore U \cap A = A$; $\therefore A$ es indiscreto.@

Definición. Sea (X,τ) un espacio topológico arbitrario y sea $x \in X$. Si $(A_i)_I$ es la familia de espacios indiscretos que contienen a x, entonces el subespacio indiscreto máximo que contiene a x es $C(x) = \bigcup_{i\in I} A_i$ y se llama **componente indiscreta de x**.

Observación: Si para $x, y \in X$ se tiene $C(x) \cap C(y) \neq \varnothing$, entonces, debido a la proposición anterior, $C(x) \cup C(y)$ es un subespacio indiscreto, y contiene a x; y como el indiscreto máximo que contiene a x es $C(x)$, entonces $C(x) \cup C(y) \subseteq C(x)$; $\therefore C(y) \subseteq C(x)$, y análogamente, $C(x) \subseteq C(y)$. Por lo tanto, si para $x, y \in X$ se tiene $C(x) \cap C(y) \neq \varnothing$, entonces $C(x) = C(y)$.

TEOREMA. Las fibras de la T_0-reflexión de (X,τ) son las componentes indiscretas de (X,τ).

Demostración: Como ya dijimos, las fibras de la T_0-reflexión son las clases de equivalencia en X definidas por la relación $\sim_F$. Probaremos lo que se quiere demostrando que si $\sim$ es la relación

$$x \sim y \Leftrightarrow C(x) = C(y)$$

entonces $\sim \,=\, \sim_F$.

Supongamos que $x \sim y$, entonces $C(x) = C(y)$, de manera que si llamamos C a esta componente tendremos: $[x], [y] \in r_0(C)$. No olvidemos, por otra parte, que $(X / \sim_F, \tilde{\tau})$ es T_0, de modo que si $[x] \neq [y]$, existirá $\tilde{U} \in \tilde{\tau}$ tal que (sin perder generalidad)

$$[x] \in \tilde{U} \subseteq (X / \sim_F) - \{[y]\};$$

pero entonces

$$x \in r_0^{-1}\left(\tilde{U}\right) \cap C \subseteq C - \{y\} \;\underset{\circ}{\nabla}$$

Esto contradice el hecho de que C es un subespacio indiscreto de X, pues debido a la continuidad de r_0, $r_0^{-1}\left(\tilde{U}\right) \cap C$ resulta ser un abierto en C que no es vacío (porque x es elemento suyo) ni coincide con C (porque le falta y). Por lo tanto, no es posible que $[x] \neq [y]$; $\therefore [x] = [y]$; $\therefore x \sim_F y$.

Para probar que $x \sim_F y \Rightarrow x \sim y$ veremos primero que son equivalentes:

(a) $C(x) \neq C(y)$.

(b) Existe un abierto en X que contiene a uno de los puntos, x ó y, pero no a los dos.

$(a) \Rightarrow (b)$ Debido a la observación anterior,

$$C(x) \neq C(y) \Rightarrow C(x) \cap C(y) = \varnothing.$$

En consecuencia $C(x)\cup\{y\}$ no es indiscreto, porque de serlo estaría contenido en $C(x)$, que es el máximo indiscreto que contiene a x, lo cual no es posible porque $y\notin C(x)$. Al no ser indiscreto habrá un abierto relativo B tal que

$$\varnothing\neq B\neq C(x)\cup\{y\}$$

Como $B\in\tau\mid(C(x)\cup\{y\})$, existe $U\in\tau$ tal que $B=U\cap(C(x)\cup\{y\})$. Veamos de cuántas formas puede intersectar U a $C(x)\cup\{y\}$. Para empezar, U no puede contener a toda la unión porque entonces B sería $C(x)\cup\{y\}$, y estamos suponiéndolo subconjunto propio. Tampoco puede ser que U contenga sólo una parte de $C(x)$ porque entonces $U\cap C(x)$ sería un abierto en $C(x)$ que no es $\varnothing$ ni es $C(x)$, lo que está en contradicción con el hecho de que $C(x)$ es indiscreto. De ese modo las intersecciones posibles se reducen a dos:

$$U\cap(C(x)\cup\{y\})=C(x)\ \text{ó}\ U\cap(C(x)\cup\{y\})=\{y\}$$

En ambos casos U es un abierto en X que contiene a uno de los puntos pero no a los dos.

$(b)\Rightarrow(a)$ Sea $U\in\tau$ y supongamos que $x\in U\subseteq X-\{y\}$. Entonces $C(x)\subseteq U$, porque $U\cap C(x)\neq\varnothing$ y $C(x)$ es indiscreto. Además, $U\cap C(y)=\varnothing$ porque de lo contrario, la indiscreción de $C(y)$ implicaría $C(y)\subseteq U$ y $y\in U$, lo que es falso. Por lo tanto, $C(x)\cap C(y)=\varnothing$, lo cual hace imposible que las componentes coincidan, por lo que tenemos $C(x)\neq C(y)$.

Supongamos ahora que $x\nsim y$. En vista de lo anterior, existe $U\in\tau$ tal que $x\in U\subseteq X-\{y\}$. Sea S el espacio de Sierpinski y sea

$$f:(X,\tau)\to S\ .\ni.\ f(U)=\{s_1\}\ \text{ y }\ f(X-U)=\{s_2\}$$

Entonces f es un miembro de la clase de funciones $(f_i)_I$ de la fuente $\mathcal{F}$ porque es continua y S es T_0. Además $f(x)\neq f(y)$, lo cual implica que $x\nsim_{\mathcal{F}}y$. Esto demuestra que $x\nsim y\Rightarrow x\nsim_{\mathcal{F}}y$ o, lo que es lo mismo, que $x\sim_{\mathcal{F}}y\Rightarrow x\sim y$. Por lo tanto $\sim\,=\,\sim_{\mathcal{F}}$, y el teorema queda demostrado.@

<u>*Ejercicio:*</u> 9. Sea (X,τ) un espacio topológico arbitrario. Probar que si $\sim$ es la relación

$$x\sim y\Leftrightarrow\overline{\{x\}}=\overline{\{y\}}$$

entonces $\sim\,=\,\sim_{\mathcal{F}}$, donde $\mathcal{F}$ es la fuente de todas las funciones continuas de dominio (X,τ) y codominio en T_0.

Navidad.

9

Espacios Métricos.

Enero 6 de 1986.

Definición. Un **espacio métrico** es una pareja (M,d) donde M es un conjunto arbitrario y d es una función

$$d: M \times M \to \mathbb{R}$$

tal que, para cualesquiera $x,y,z \in M$ se tiene:
i) $d(x,y) \geq 0$;
ii) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
iii) $d(x,y) = d(y,x)$;
iv) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

En tal caso se dice que d es una **métrica** para M.

Ejemplos: 1. Todo espacio euclidiano es métrico. En efecto, de acuerdo a su definición, el espacio euclidiano n-dimensional $\mathbb{E}^n$ es la pareja $(\mathbb{R}^n, \rho)$ en la que $\mathbb{R}^n$ es el espacio vectorial de dimensión n y

$$\rho: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

es la función dada por

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Es fácil ver que se satisfacen las propiedades anteriores.

2. Sea M un conjunto arbitrario; si $d: M \times M \to \mathbb{R}$ es la función

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y \\ 1, & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

entonces d es una métrica para M.

3. Si d es una métrica para M y $k > 0$, entonces

$$d' = dk, \text{ i.e. } d'(x,y) = k[d(x,y)]$$

también es una métrica para M.

Definición. Se dice que un espacio métrico (M,d) está **acotado** cuando existe un número $k > 0$ tal que $d(x,y) < k$, $\forall x, y \in M$.

9.0.2 Algunos conceptos de espacios métricos.

Sea (M,d) un espacio métrico arbitrario.

a) Si $A \subseteq M$, $A \neq \varnothing$ y $x \in M$, entonces **la distancia de x a A** es

$$d(x,A) = \inf\{d(x,a) : a \in A\}$$

b) Una **sucesión en M** es una función $s: \mathbb{N} \to M$. Como es usual, trabajaremos más con las imágenes en M de esta función que con la función misma, para las cuales, en vez de utilizar la notación $s(n)$ escribiremos x_n, entendiendo que $x_n = s(n)$.

c) Un **disco abierto** con centro $x \in M$ y radio $r > 0$ es el conjunto

$$D_r(x) = \{y \in M : d(x,y) < r\}$$

d) Una sucesión $\{x_n\}$ en M **converge a** $x \in M$ si, y sólo si, la sucesión $\{d(x, x_n)\}$ de números reales converge a 0. Si tal cosa ocurre, la notación que emplearemos será:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ o } x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \text{ o } \{x_n\} \to x$$

Por otra parte, se sabe que si una familia β de subconjuntos de X satisface las condiciones:
(a) β cubre a X;
(b) $B_1, B_2 \in \beta$ y $x \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists B_3 \in \beta .\ni . x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$;
entonces existe una topología para X de la cual β es base[1].
Sea

$$\beta(d) = \{D_r(x) \mid x \in M, r > 0\};$$

claramente $\beta(d)$ cubre a M, y si

$$z \in D_r(x) \cap D_s(y) \text{ y } t = \min\{r - d(x,z), s - d(y,z)\}$$

entonces

$$z \in D_t(z) \subseteq D_r(x) \cap D_s(y)$$

En efecto, si $w \in D_t(z)$, entonces

$$d(x,w) \le d(x,z) + d(z,w) < d(x,z) + t \le r \ ;$$

por lo tanto $D_t(z) \subseteq D_r(x)$ y, análogamente, $D_t(z) \subseteq D_s(y)$. Esto demuestra que la familia de discos abiertos $\beta(d)$ es base de una topología para M.

Enero 8 de 1986.

Definición. La topología para M definida por la métrica d es la que tiene por base a la familia de discos abiertos $\beta(d)$ y la denotaremos por $\tau(d)$. En tal caso, nos referiremos a la pareja $(M, \tau(d))$ como al **espacio topológico definido por la métrica d.**

Ejemplos: 1. El espacio topológico definido por la métrica euclidiana de $\mathbb{E}^n$ es el espacio euclidiano con la topología usual.

2. Si (M,d) es tal que

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, \text{ si } x = y \\ 1, \text{ si } x \ne y \end{cases}$$

entonces $\tau(d)$ es la topología discreta.

3. $(M, \tau(d)) \in T_2$, cualquiera que sea (M,d). En efecto, para cualesquiera $x, y \in M$, haciendo $r = \frac{1}{2} d(x,y)$ tenemos

$$D_r(x) \cap D_r(y) = \varnothing.$$

4. Si (M,d) es cualquier espacio métrico y $d' = kd$, con $k > 0$, entonces $\tau(d) = \tau(d')$ porque $D_r(x) = D'_{kr}(x)$.

Definición. Dos métricas d y d' para M **son equivalentes** si $\tau(d) = \tau(d')$.

Ejercicio 10. Sea (M,d) un espacio métrico arbitrario y sea

$$d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$$

(a) Probar que d' es una métrica para M.
(b) Probar que d' es equivalente a d.
Nótese que (M, d') resulta acotado aunque (M,d) no lo sea.

Lema. Si $\{x_n\}$ es una sucesión en M, entonces son equivalentes:
a) $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$
b) $\forall U \in \mathcal{N}_x^\circ \exists\ n_U \in \mathbb{N} .\ni . n \ge n_U \Rightarrow x_n \in U$

[1]Recuérdese el segundo teorema visto en la clase del 15 de julio.

c) $\forall \varepsilon > 0 \exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}.\ni.n \geq n_\varepsilon \Rightarrow x_n \in D_\varepsilon(x)$.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Sea $U \in \mathcal{N}_x^\circ$; entonces existe $r > 0$ tal que $D_r(x) \subseteq U$; por (a) existe $n_U \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_U \Rightarrow d(x_n, x) < r$$

Luego $x_n \in D_r(x)$; $\therefore x_n \in U$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Sea $\varepsilon > 0$; como $x \in D_\varepsilon(x) \in \tau(d)$, entonces $D_\varepsilon(x) \in \mathcal{N}_x^\circ$. Por (b) existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow x_n \in D_\varepsilon(x)$$

(c) $\Rightarrow$ (a) Sea $\varepsilon > 0$; por (c) existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in D_\varepsilon(x)$ si $n \geq n_\varepsilon$. Luego

$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon\ ;$$

por lo tanto $d(x_n, x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$; por lo tanto $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$.@

Proposición. Sean, (M, d) cualquier espacio métrico y $A \subseteq M$; son equivalentes:

a) $x \in \overline{A}$

b) $d(x, A) = 0$

c) Existe una sucesión de elementos de A que converge a x.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Por (a) tenemos

$$\forall r > 0,\ D_r(x) \cap A \neq \varnothing$$

En consecuencia

$$\forall r > 0 \exists\ a \in A.\ni.d(x, a) < r$$

Por lo tanto

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\} = 0$$

(b) $\Rightarrow$ (c) Por (b)

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists\ x_n \in A.\ni.d(x, x_n) < \frac{1}{n};$$

Luego $d(x_n, x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$; $\therefore x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$.

(c) $\Rightarrow$ (a) Sea $\{x_n\} \subseteq A$ tal que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$; debido al lema, para cada $U \in \mathcal{N}_x^\circ$, $x_n \in U$ a partir de cierto rango. Luego, $U \cap A \neq \varnothing$; por lo tanto $x \in \overline{A}$.@

Enero 10 de 1986.

Proposición. Si (M, d) es un espacio métrico arbitrario y $C \subseteq M$, son equivalentes:

a) C es cerrado.

b) Si $d(x, C) = 0$ entonces $x \in C$.

c) Si $\{x_n\}$ es una sucesión de elementos de C que converge a x, entonces $x \in C$.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) De la proposición anterior tenemos que

$$d(x, C) = 0 \Rightarrow x \in \overline{C}$$

y como, por (a), $\overline{C} = C$, entonces $x \in C$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Sea $\{x_n\} \subseteq C$ tal que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$; entonces $d(x_n, x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$; $\therefore d(x, C) = 0$. Por (b), $x \in C$.

(c) $\Rightarrow$ (a) Sea $x \in \overline{C}$; debido a la proposición anterior, existe una sucesión de elementos de C que converge a x. Por (c), $x \in C$; $\therefore \overline{C} \subseteq C$; $\therefore C = \overline{C}$; $\therefore C$ es cerrado.

Proposición. Si (M, d) es un espacio métrico arbitrario y $A \subseteq M$, son equivalentes:

(a) A es abierto.

(b) $\forall x \in A$, $d(x, M - A) > 0$.

(c) Si $\{x_n\} \to x$ y $x \in A$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in A$ si $n \geq n_0$.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Por (a), $M - A$ es cerrado, de modo que por la proposición anterior

$$d(x, M - A) = 0 \Rightarrow x \in M - A$$

o lo que es lo mismo

$$x \in A \Rightarrow d(x, M - A) > 0$$

(b) $\Rightarrow$ (c) Supongamos que $\{x_n\} \to x$ y que $x \in A$. Por (b), $d(x, M - A) > 0$; por lo tanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x) < \frac{1}{2} d(x, M - A), \forall n \geq n_0$$

Entonces $x_n \in A$, porque de lo contrario sería imposible la desigualdad anterior.

(c) $\Rightarrow$ (a) Sea $\{x_n\}$ una sucesión de elementos de $M - A$ que converge a x. Entonces $x \notin A$, pues, debido a (c), lo contrario implicaría que $x_n \in A$ a partir de cierto rango, lo que es falso. Luego, $x \in M - A$, lo cual, por la proposición anterior, implica que $M - A$ es cerrado; $\therefore A$ es abierto.@

Proposición. Sea $f : (M, d) \to (M', d')$ una función arbitraria; son equivalentes:

(a) f es continua en x.

(b) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 .\ni. d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$

(c) Si $\{x_n\} \to x$, entonces $\{f(x_n)\} \to f(x)$.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Sea $\varepsilon > 0$; como $D_\varepsilon(f(x)) \in \mathcal{N}^\circ_{f(x)}$, por (a) existe $\delta > 0$ tal que $f(D_\delta(x)) \subseteq D_\varepsilon(f(x))$. Luego, $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$, si $d(x, y) < \delta$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Sea $\varepsilon > 0$ y sea $\delta > 0$ tal que

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Si $\{x_n\} \to x$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x) < \delta, \forall n \geq n_0$$

Entonces

$$d'(f(x_n), f(x)) < \varepsilon, \forall n \geq n_0$$

$$\therefore \lim_{n \to \infty} d'(f(x_n), f(x)) = 0; \ \therefore \{f(x_n)\} \to f(x)$$

(c) $\Rightarrow$ (a) Demostremos la contrapuesta. Supongamos que f no es continua en x; entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(D_\delta(x)) \not\subseteq D_\varepsilon(f(x)), \forall \delta > 0$$

$$\text{i.e. } \forall \delta > 0 \exists x' \in D_\delta(x) .\ni. f(x') \notin D_\varepsilon(f(x))$$

En particular

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in D_{\frac{1}{n}}(x) .\ni. f(x_n) \notin D_\varepsilon(f(x))$$

Entonces

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \text{ pero } \lim_{n \to \infty} f(x_n) \neq f(x) \quad @$$

Enero 13 de 1986.

Definición. Sea (X, τ) un espacio topológico arbitrario. Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ en X **converge a** x si

$$\forall U \in \mathcal{N}_x \exists n_U \in \mathbb{N} .\ni. x_n \in U, \forall n \geq n_U$$

A diferencia de lo que ocurre en los espacios métricos, extendiendo así el concepto de convergencia no logran aprehenderse los conceptos básicos de la topología, lo cual lleva a la necesidad de introducir un nuevo concepto de convergencia. A este concepto se le llama **convergencia de Moore-Smith**.

10

Compacidad

Lunes 18 de mayo de 1987.

Quinta tanda de ejercicios. 1. Si $f : X \to Y$ es continua e inyectiva y $Y \in T_i$, $i \in \{0,1,2\}$, probar que $X \in T_i$.

2. Sea $(X_\lambda)_\Lambda$ una familia no vacía de espacios topológicos no vacíos, probar, para $i \in \{0,1\}$, que $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \in T_i \Leftrightarrow X_\lambda \in T_i, \forall\lambda \in \Lambda$.

3. Sean, X un conjunto arbitrario y B un subconjunto fijo de X. Para cualquier subconjunto A de X defínase

$$\overline{A} = \begin{cases} \varnothing, \text{ si } A = \varnothing \\ A \cup B, \text{ si } A \neq \varnothing \end{cases}$$

Probar que esta definición satisface los axiomas de Kuratowski; además caracterizar los conjuntos B para los que $X \in T_i$, $i = 0, 1, 2$.

Sea X un conjunto arbitrario. Ya hemos dicho que una cubierta de X es una familia $\mathcal{A} = (A_\lambda)_\Lambda$ de subconjuntos de X cuya unión es igual a X; que $\mathcal{A}$ es finita cuando Λ es finito, y que si τ es una topología para X, $\mathcal{A}$ es abierta cuando $A_\lambda \in \tau, \forall\lambda \in \Lambda$. Cualquier subfamilia $\mathcal{A}'$ de la cubierta $\mathcal{A}$ que cubra a X se llama **subcubierta de** $\mathcal{A}$.

Definición. Sea (X,τ) un espacio topológico arbitrario. Se dice que X es **compacto** cuando toda cubierta abierta de X posee una subcubierta finita.

Ejemplos: 1.Todo espacio topológico finito es compacto.

2. Por el teorema de Heine-Borel, todo intervalo cerrado en $\mathbb{R}$ es compacto.

10.0.3 Algunas propiedades básicas de los espacios compactos.

Mayo 20 de 1987.

Definición. Sea X un conjunto o espacio arbitrario; una familia $(C_\lambda)_\Lambda$ de subconjuntos de X tiene la **propiedad de intersección finita** si para todo subconjunto Λ' de Λ ocurre que $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda'} C_\lambda \neq \varnothing$.

Observación. Si $(C_\lambda)_\Lambda$ tiene la propiedad anterior y $A_\lambda = X - C_\lambda$, $\forall\lambda \in \Lambda$, entonces ninguna subfamilia finita de $(A_\lambda)_\Lambda$ es cubierta de X porque si Λ' es finito, entonces

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda'} A_\lambda = X - \bigcap_{\lambda\in\Lambda'} C_\lambda \neq X$$

Teorema. Sea (X,τ) un espacio topológico arbitrario; son equivalentes:

(a) (X,τ) es compacto;

(b) Toda familia $(C_\lambda)_\Lambda$ de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Sea $(C_\lambda)_\Lambda$ cualquier familia de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de intersección finita. Para cada $\lambda \in \Lambda$, sea $A_\lambda = X - C_\lambda$; entonces $A_\lambda \in \tau, \forall\lambda \in \Lambda$. Debido a la observación anterior, ninguna subfamilia finita de $(A_\lambda)_\Lambda$ cubre a X; por (a), $(A_\lambda)_\Lambda$ tampoco puede cubrir a X. Luego, $X - \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \varnothing$, i.e. $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda \neq \varnothing$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Sea $\mathcal{A} = (A_\lambda)_\Lambda$ cualquier cubierta abierta de X y sea $C_\lambda = X - A_\lambda$; entonces $C_\lambda$es cerrado en X, $\forall\lambda \in \Lambda$. Si $\mathcal{A}$ no tuviera una subcubierta finita, entonces $(C_\lambda)_\Lambda$ tendría la propiedad de intersección finita y, aplicando (b), tendríamos que $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda \neq \varnothing$, de donde resulta que $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq X$, lo que es falso. Luego, $\mathcal{A}$ posee alguna subcubierta finita. Por lo tanto, X es compacto.@

Teorema. Sea X cualquier espacio compacto; entonces:
(a) $f: X \to Y$ continua y suprayectiva implica que Y es compacto.
(b) Todo subconjunto cerrado de X es compacto.[1]
Demostración. (a) Sea $(A_\lambda)_\Lambda$ cualquier cubierta abierta de Y; entonces $\left[f^{-1}(A_\lambda)\right]_\Lambda$ es una cubierta abierta de X, de modo que existe $\Lambda' \subseteq \Lambda$ finito tal que $\bigcup_{\lambda\in\Lambda'} f^{-1}(A_\lambda) = X$. Luego, debido a la suprayectividad de f tenemos

$$Y = f(X) = f\left[\bigcup_{\lambda\in\Lambda'} f^{-1}(A_\lambda)\right] = \bigcup_{\lambda\in\Lambda'} f\left[f^{-1}(A_\lambda)\right] = \bigcup_{\lambda\in\Lambda'} A_\lambda$$

lo cual demuestra que Y es compacto.
(b) Sea C cualquier subconjunto cerrado de X; hay que probar que $(C, \tau \mid C)$ es compacto, donde τ es la topología de X. Sea $(C_\lambda)_\Lambda$ cualquier familia de subconjuntos cerrados de C con la propiedad de intersección finita. Entonces cada C_λ es cerrado en X, que por hipótesis es compacto; luego $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda \neq \varnothing$. Por lo tanto, $(C, \tau \mid C)$ es compacto.@

Mayo 22 de 1987.

Lema. Sea X un espacio topológico cualquiera. Si $C \subseteq X$, entonces son equivalentes:
(a) C es compacto.
(b) Si $(U_\lambda)_\Lambda$ es cualquier familia de abiertos de X y $C \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$, entonces existe $\Lambda' \subseteq \Lambda$ finito tal que $C \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda'} C_\lambda$.
Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Sea $(U_\lambda)_\Lambda$ cualquier familia de abiertos de X tal que $C \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$. Entonces $(C \cap U_\lambda)_\Lambda$ es una cubierta abierta de C; por (a), existe $\Lambda' \subseteq \Lambda$ finito para el cual se tiene

$$C = \bigcup_{\lambda\in\Lambda'} (C \cap U_\lambda) = C \cap \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda'} U_\lambda\right)$$

Por lo tanto, $C \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda'} U_\lambda$.
(b) $\Rightarrow$ (a) Sea $\mathcal{A} = (A_\lambda)_\Lambda$ cualquier cubierta abierta de C. Entonces para cada $\lambda \in \Lambda$ existe un abierto absoluto U_λ tal que $A_\lambda = C \cap U_\lambda$; por consiguiente $C \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$. Por (b), existe $\Lambda' \subseteq \Lambda$ finito tal que $C \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda'} U_\lambda$. Luego

$$C = C \cap \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda'} U_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda'} A_\lambda$$

Por lo tanto, $(A_\lambda)_{\Lambda'}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{A}$; por lo tanto C es compacto.@
Proposición. Si C es un subconjunto compacto de un espacio de Hausdorff X, entonces C es cerrado.
Demostración. Probaremos que $X - C$ contiene una vecindad de cada uno de sus puntos. Sea $x \in X - C$ fijo pero arbitrario. Como $X \in T_2$, para cada $c \in C$ existen vecindades abiertas y ajenas $U_c \in \mathcal{N}_c^\circ$ y $V_c \in \mathcal{N}_x^\circ$. Entonces $\mathcal{U} = (U_c)_C$ es una cubierta abierta absoluta de C. Debido al lema, $\mathcal{U}$ posee una subcubierta finita $(U_c)_D$ (con $D \subseteq C$ finito). Sea $V = \bigcap_{c\in D} V_c$; entonces $V \in \mathcal{N}_x^\circ$ y $V \cap U_c = \varnothing, \forall c \in D$;

$$\therefore V \cap \left(\bigcup_{c\in D} U_c\right) = \varnothing; \ \therefore V \subseteq X - \bigcup_{c\in D} U_c \subseteq X - C$$

Luego, $X - C$ es abierto y por lo tanto C es cerrado.@
Nota: La hipótesis de que $X \in T_2$ no puede omitirse; piénsese, por ejemplo, en que X fuese indiscreto e infinito. X es compacto porque todo espacio indiscreto lo es; si $C \subset X$, entonces C es indiscreto porque los espacios indiscretos inducen subespacios indiscretos. Por lo tanto, C es compacto pero no es cerrado.[2]

[1] Cuando una propiedad P del espacio X la posee cualquier subconjunto cerrado suyo se dice que P es **semi-hereditaria**.
(Cf. definiciones al final de la clase del 4 de septiembre.)
[2] ¿El que todos los subconjuntos compactos de un espacio sean cerrados implicará que'l tal espacio es de Hausdorff?

COROLARIO. Si $f : X \to Y$ es continua, X compacto y Y de Hausdorff, entonces f es cerrada.

Demostración. Sea C cualquier subconjunto cerrado de X; entonces C es compacto (cualquier cerrado de un compacto es compacto). Como f es continua, entonces $f \mid_C^{f(C)}$ es continua y suprayectiva; luego, $f(C)$ es compacto en Y que es de Hausdorff. Por la proposición anterior, $f(C)$ es cerrado en Y y esto prueba que f es cerrada.@

Mayo 25 de 1987.

Proposición. Si $f : X \to Y$ es continua y suprayectiva, X compacto y Y de Hausdorff, entonces f es un cociente.

Demostración. Por el resultado anterior, f es cerrada. Por lo tanto, f es un cociente.@

En la clase del 27 de noviembre quedó pendiente la prueba de que la función

$$\begin{array}{ccc} [0, 2\pi] & \xrightarrow{f} & S^1 \\ t & \mapsto & (\cos t, \operatorname{sen} t) \end{array}$$

es cerrada. Es claro que f es continua, pues lo son sus proyecciones

$$p_1 f(t) = \cos t \quad \text{y} \quad p_2 f(t) = \operatorname{sen} t$$

Por otro lado, por el teorema de Heine-Borel, el intervalo $[0, 2\pi]$ es compacto, y como $\mathbb{E}^2$ con la topología usual es de Hausdorff, resulta que S^1 con la topología inducida también es de Hausdorff. Por lo tanto, f es cerrada. Como además $f[0, 2\pi] = S^1$, entonces de la proposición anterior resulta que f es un cociente, como ya se sabía.@

Ahora enunciaremos un teorema del que dejaremos su demostración pendiente[3].

TEOREMA. Un producto de espacios no vacíos es compacto si, y sólo si, cada factor es compacto.[@]

De este teorema resulta compacto el cuadrado $X = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. Sea $Y = S^1 \times I$; entonces $Y \in T_2$. Y si $h : X \to Y$ es la función $f \times g$, donde f es la función anterior y g es la transformación lineal

$$\begin{array}{ccc} [0, 2\pi] & \xrightarrow{g} & I \\ x & \mapsto & \frac{1}{2\pi} x \end{array}$$

Entonces h es continua y claramente suprayectiva; por la proposición anterior h es un cociente, como también se había dicho ya[4].

Continuaremos la vez próxima.

Viernes 29 de mayo de 1987.

Ejercicios: 4. Si $f : X \to Y$ es continua y biyectiva, X compacto y Y es de Hausdorff, pruebe que f es un homeomorfismo.

5. Sea (M, d) un espacio métrico arbitrario. Probar que si M es compacto entonces está acotado.

6. Sea (M, d) un espacio métrico y $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de M. Pruebe que si $\{x_n\} \to x$, entonces es compacto el conjunto

$$\{x_n \in M : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$$

Proposición. Si $X \in T_2$, entonces cualesquiera dos subconjuntos compactos y ajenos de X poseen sendas vecindades abiertas y ajenas.

Demostración. Sean $A, B \subseteq X$ compactos y ajenos. Comencemos analizando el caso en que alguno de ellos es singular, es decir, supongamos, por ejemplo, que $B = \{b\}$. Entonces, $a \neq b, \forall a \in A$. Como $X \in T_2$, existen

$$U_a \in \mathcal{N}_a^\circ \quad \text{y} \quad V_a \in \mathcal{N}_b^\circ$$

tales que $U_a \cap V_a = \varnothing$. Obsérvese que $\mathcal{U} = (U_a)_A$ es una cubierta abierta absoluta de A en X; como A es compacto existen

$$U_{a_1}, U_{a_2}, ..., U_{a_n} \in \mathcal{U}$$

[3] Véase la nota de la clase del 31 de julio de 1987.

[4] 27 de noviembre.

que también cubren A. Sea

$$V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{a_i}$$

entonces $V \in \mathcal{N}_b^\circ$ y

$$V \cap U_{a_i} = \varnothing, \text{ para } 1 \leq i \leq n.$$

Por lo tanto, haciendo

$$U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i}$$

tendremos $U \cap V = \varnothing$, con lo que el caso particular queda demostrado. Valiéndonos de esto podemos demostrar fácilmente el caso general. En efecto, si A y B son dos compactos ajenos cualesquiera, ya sabemos que para cada $b \in B$ existen vecindades abiertas y ajenas U_b y V_b de A y $\{b\}$, respectivamente. Pero $(V_b)_B$ es una cubierta abierta absoluta de B que, por ser compacto, posee una subcubierta finita

$$\{V_{b_1}, V_{b_2}, ..., V_{b_m}\}$$

Finalmente, haciendo

$$U = \bigcap_{j=1}^{m} U_{b_j} \quad \text{y} \quad V = \bigcup_{j=1}^{m} V_{b_j}$$

obtenemos sendas vecindades abiertas y ajenas de A y B, respectivamente.@

Corolario. Si X es un espacio compacto y de Hausdorff, entonces para cualquier par de subconjuntos cerrados y ajenos de X existen vecindades abiertas y ajenas.

Def. La propiedad enunciada en este corolario se llama **normalidad**, y a los espacios que la poseen, particularmente a los compactos de Hausdorff, se les da el nombre de *espacios normales*. A la propiedad que se observó en el caso particualar de la demostración se le llama **regularidad**[5].

Para demostrar el siguiente resultado recordemos que si (X, τ) es un espacio topológico y $\beta \subseteq \tau$, entonces β es base de τ si, y sólo si, para cada $x \in X$

$$\beta_x = \{B \in \beta \mid x \in B\}$$

es una base local en x[6]. Recordemos también que si γ_X y γ_Y son subbases respectivas de las topologías de X y Y, entonces una base para la topología de $X \times Y$ es

$$\tilde{\beta} = \{U \times V : U \in \gamma_X, V \in \gamma_Y\}$$

En consecuencia, una base local en $(x, y) \in X \times Y$ es

$$\tilde{\beta}_{(x,y)} = \left\{U \times V \in \tilde{\beta} \mid (x, y) \in U \times V\right\}$$

Proposición. Sean X y Y dos espacios de Hausdorff cualesquiera. Si A y B son dos subconjuntos compactos de X y Y, respectivamente y W es una vecindad abierta de $A \times B$ en $X \times Y$, entonces existen vecindades abiertas U y V de A y B, respectivamente, tales que $U \times V$ está contenido en W.

Demostración. Sea $(a, b_0) \in A \times B$, siendo b_0 un elemento fijo de B; como $A \times B \subseteq W$ y W es abierto en $X \times Y$, existe

$$U_a \times V_a \in \tilde{\beta}_{(a,b_0)} \quad \cdot\!\ni\!\cdot \quad U_a \times V_a \subseteq W$$

Entonces

$$U_a \in \mathcal{N}_a^\circ \quad \text{y} \quad V_a \in \mathcal{N}_{b_0}^\circ$$

y como esto pasa para cada $a \in A$, entonces $\mathcal{U} = (U_a)_A$ es una cubierta abierta de A que, al ser compacto, posee una subcubierta finita

$$\{U_{a_1}, U_{a_2}, ..., U_{a_n}\}$$

Sean

$$U_{b_0} = \bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i} \quad \text{y} \quad V_{b_0} = \bigcap_{i=1}^{n} V_{a_i}$$

[5] Cf. def. del 3 de agosto de 1987.
[6] Julio 17 de 1985.

Entonces
$$U_{b_0} \times V_{b_0} \subseteq W$$
porque
$$U_{a_i} \times V_{b_0} \subseteq W, \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$$
Y como esto puede hacerse fijando cada elemento en B, entonces
$$\forall b \in B \exists U_b \in \mathcal{N}_A^\circ, V_b \in \mathcal{N}_b^\circ . \ni . U_b \times V_b \subseteq W$$
Finalmente, $(V_b)_B$ es una cubierta abierta de B que, debido a la compacidad, posee una subcubierta finita
$$\{V_{b_1}, V_{b_2}, ..., V_{b_m}\}$$
Y si
$$U = \bigcap_{j=1}^{m} U_{b_j} \quad \text{y} \quad V = \bigcup_{j=1}^{m} V_{b_j}$$
entonces
$$U \in \mathcal{N}_A^\circ \quad , \ V \in \mathcal{N}_B^\circ \quad \text{y} \quad U \times V \subseteq W$$
porque
$$U \times V_{b_j} \subseteq W, \forall j \in \{1, 2, ..., m\} \qquad @$$
Continuaremos la vez próxima.

Lunes 1 de junio de 1987.

Ejercicio 7. Sean, $X \in T_1$, $x \in X$ y $A \subseteq X$; probar que x es punto de acumulación de A si, y sólo si, $U \cap A$ es infinito, $\forall U \in \mathcal{N}_x$.

Definición. Sea X un espacio topológico y $\{x_n\}$ una sucesión de elementos de X. Se dice que un punto $x \in X$ es **punto de aglomeración de** $\{x_n\}$ si
$$\forall U \in \mathcal{N}_x \text{ y } \forall n \in \mathbb{N} \exists \ m \in \mathbb{N}, m > n . \ni . x_m \in U$$

Ejemplos: 1. Si $\{x_n\} \to x$, entonces x es punto de aglomeración de $\{x_n\}$.

2. El recíproco del ejemplo anterior no es válido en general. Por ejemplo, si $X = \mathbb{R}$ y $\{x_n\}$ es la sucesión
$$x_n = \begin{cases} 1, \, n \text{ non} \\ 2, \, n \text{ par} \end{cases}$$
entonces 1 y 2 son puntos de aglomeración de $\{x_n\}$, pero $\{x_n\}$ no converge ni a 1 ni a 2.

Lema. Sea (M, d) un espacio métrico cualquiera y $\{x_n\}$ una sucesión en M. Si x es punto de aglomeración de M, entonces existe una subsucesión $\{x_{n_m}\}$ de $\{x_n\}$ que converge a x.

Demostración. Supongamos que x es punto de aglomeración de $\{x_n\}$. Entonces
$$\{n \in \mathbb{N} : x_n \in D_1(x)\} \neq \varnothing$$
Por el Principio del Buen Orden en $\mathbb{N}$[7] existe el primer natural $n_1$de este conjunto. Pero x es punto de aglomeración; entonces
$$\left\{n \in \mathbb{N} : n > n_1 \text{ y } x_n \in D_{\frac{1}{2}}(x)\right\} \neq \varnothing$$
Sea n_2 su primer elemento... Supongamos que procediendo de este modo se obtienen los números
$$n_1 < n_2 < \cdots < n_m$$
y que
$$x_{n_k} \in D_{\frac{1}{k}}(x), \text{ para } 1 \leq k \leq m$$

[7]Todo subconjunto no vacío de números naturales tiene un primer elemento.

Entonces, como x es punto de aglomeración de $\{x_n\}$,

$$\left\{n \in \mathbb{N} : n > n_m \text{ y } x_n \in D_{\frac{1}{m+1}}(x)\right\} \neq \varnothing$$

Por el P.B.O. existe el primer elemento de este conjunto. Esto prueba que la sucesión creciente de números naturales $\{n_m\}$ puede proseguirse indefinidamente. Y como

$$d(x_{n_m}, x) < \frac{1}{m}, \forall m \in \mathbb{N}$$

entonces

$$\lim_{m\to\infty} d(x_{n_m}, x) = 0$$

lo que significa que $\{x_{n_m}\} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} x$, como se quería probar.@

Junio 5 de 1987.

Proposición. En un espacio métrico compacto cualquier sucesión posee algún punto de aglomeración.

Demostración. Supongamos que (M, d) es métrico y compacto y que $\{x_n\}$ es una sucesión de elementos de M. Si $\{x_n\}$ no tuviera puntos de aglomeración, entonces para cualquier $x \in M$ existirían

$$U_x \in \mathcal{N}_x^\circ \quad \text{y} \quad n(x) \in \mathbb{N}$$

tales que

$$x_m \notin U_x, \forall m \in \mathbb{N}, m > n(x)$$

Pero $(U_x)_M$ es una cubierta abierta de M. Luego, debido a la compacidad, existe una subcubierta finita

$$\{U_{x_1}, U_{x_2}, ..., U_{x_m}\}$$

para la cual tenemos que en U_{x_i} hay, a lo más, $n(x_i)$ términos de la sucesión. De aquí resulta que en M hay, cuando mucho, $\sum\limits_{i=1}^{m} n(x_i)$ términos de la sucesión (en el sentido de los índices), lo cual es absurdo, pues hay tantos como números naturales. Luego, falso suponer que $\{x_n\}$ carece de puntos de aglomeración en M y, por lo tanto, posee al menos un punto de aglomeración.@

Corolario. En un espacio métrico compacto cualquier sucesión tiene una subsucesión convergente.

Demostración. De la proposición se sigue que $\{x_n\}$ posee algún punto de aglomeración x y por el lema anterior se sabe que en tal caso existe una subsucesión de $\{x_n\}$ que converge a x.@

Definición. Sea (M, d) un espacio métrico cualquiera y sea $A \subseteq M$, $A \neq \varnothing$; entonces **el diámetro de** A, que denotaremos como $\delta(A)$, es

$$\delta(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$$

TEOREMA. Si (M, d) un espacio métrico compacto, entonces para toda cubierta abierta $\mathcal{U}$ de M existe un número $\eta \in \mathbb{R}^+$ con relación al cual puede asegurarse que toda región del espacio cuyo diámetro sea menor que η estará cubierta por algún miembro de $\mathcal{U}$.

Demostración. Supongamos que el enunciado es falso y que $\mathcal{U}$ es tal que para todo natural n siempre existe alguna región en el espacio que, aunque su diámetro sea menor que $\frac{1}{n}$, no queda cubierta por ninguno de los miembros U_j de $\mathcal{U}$; en símbolos:

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists\ A_n \subseteq M . \ni . \delta(A_n) < \frac{1}{n} \text{ y } A_n \not\subseteq U_j, \forall j \in J$$

Es claro que toda $A_n \neq \varnothing$, pues de lo contrario $A_n \subset U_j$. Por consiguiente, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos escoger un punto $x_n \in A_n$ y formar una sucesión; por el corolario anterior, existe una sucesión parcial $\{x_{n_m}\}$ de $\{x_n\}$ que converge, digamos, a $x \in M$. Como $\mathcal{U}$ cubre a M, existe algún miembro $U_j \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U_j$; y como $\mathcal{U}$ es abierta y $x_{n_m} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} x$, entonces todos los términos de la subsucesión a partir de cierto rango caen en U_j. Más todavía; como la familia de discos abiertos de centro en x constituye una base local de vecindades en x y $U_j \in \mathcal{N}_x$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $D_\varepsilon(x) \subseteq U_j$; de modo que, debido a la convergencia, existe $m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_{n_m}, x) < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ si } m \geq m(\varepsilon).$$

Si además el propio natural n_m satisface que

$$n_m \geq \frac{2}{\varepsilon}$$

entonces, dado que $\delta(A_{n_m}) < \frac{1}{n_m}$, para $a \in A_{n_m}$ tenemos

$$d(a, x_{n_m}) \leq \delta(A_{n_m}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Aplicando la desigualdad del triángulo tenemos

$$d(a, x) \leq d(a, x_{n_m}) + d(x_{n_m}, x) < \varepsilon$$

lo que significa, dado que a se escogió arbitrariamente en A_{n_m}, que $A_{n_m} \subseteq D_\varepsilon(x)$; $\therefore A_{n_m} \subseteq U_j$ $\underset{\circ}{\nabla}$. Esta contradicción demuestra que el teorema no puede ser falso.@

Def. Al número η del teorema anterior se le llama **número de Lebesgue de la cubierta $\mathcal{U}$.**

Junio 8 de 1987.

Teorema de la Continuidad Uniforme.
Sea

$$f : (M, d) \to (M', d')$$

una función continua entre espacios métricos. Si el dominio de f es compacto, entonces

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \eta > 0.\ni.d(x_1, x_2) < \eta \Rightarrow d'(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$; por la continuidad de f tenemos que

$$\forall x \in M \ \exists \ r_x > 0.\ni.d'(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ si } y \in D_{r_x}(x)$$

Entonces $\mathcal{D} = [D_{r_x}(x)]_M$ es una cubierta abierta de M; debido a la compacidad, existe el número de Lebesgue de esta cubierta. Sea η tal número y sean $x_1, x_2 \in M$ tales que $d(x_1, x_2) < \eta$; entonces $\delta(\{x_1, x_2\}) < \eta$; por lo tanto, existe $r_x > 0$ tal que $\{x_1, x_2\} \subseteq D_{r_x}(x)$. Aplicando la desigualdad del triángulo tenemos

$$d'(f(x_1), f(x_2)) \leq d'(f(x_1), f(x)) + d'(f(x), f(x_2)) < \varepsilon$$

Por lo tanto f **es uniformemente continua.**@

Ejemplo: Como caso particular de lo anterior tenemos que toda función real continua en un intervalo cerrado es uniformemente continua. En la demostración original de este resultado, conocido como Teorema de Heine, este matemático probó que el intervalo cerrado sobre el que se define la función es un conjunto compacto. El resultado tardó mucho tiempo en hacerse público; cuando se dio a conocer, otro matemático, Emilio Borel, ya tenía una prueba de que los intervalos cerrados y acotados de la recta son conjuntos compactos. Debido a esto, el teorema suele llevar el nombre de ambos matemáticos. Pero algunos franceses atribuyen el resultado solamente a Borel, o a Borel y a Lebesgue, y por ello en libros franceses puede hallarse como Teorema de Borel-Lebesgue.

10.0.4 Descripción de los subconjuntos compactos de los espacios euclidianos.

Teorema. Si $A \subseteq \mathbb{E}^n$, son equivalentes:
(a) A es compacto.
(b) A es cerrado y acotado.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Sea A cualquier subconjunto compacto de $\mathbb{E}^n$. A es métrico, porque $\mathbb{E}^n$ lo es; entonces, como consecuencia del ejercicio 5, A está acotado, y es cerrado porque $\mathbb{E}^n$ es de Hausdorff.

(b) $\Rightarrow$ (a) No es difícil probar que cuando A es acotado se le puede encerrar en un cubo o n-celda del tipo

$$[c_1, c_2]^n = \underbrace{[c_1, c_2] \times \cdots \times [c_1, c_2]}_{n \text{ factores}}, \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Por los teoremas de Heine-Borel (en $\mathbb{R}$) y de Tychonoff (que es ese del 25 de mayo cuya demostración está pendiente), este cubo es compacto; y como A es cerrado en $\mathbb{E}^n$, también lo es en el cubo, de donde resulta que A es compacto.@

10.1 Conjuntos Dirigidos

Junio 10 de 1987.

Ejercicios: 8. Sea (X, τ) un espacio topológico arbitrario. Determinar las sucesiones convergentes en (X, τ) en los casos siguientes:
(a) Cuando τ es discreta.
(b) Cuando τ es indiscreta.
9. Si (X, τ) satisface el primer axioma de numerabilidad (i.e. cada punto posee una base local numerable), demostrar que $C \subseteq X$ es cerrado si, y sólo si, cualquier sucesión de elementos de C que converge tiene su límite en C.

Este ejercicio muestra que cuando un espacio satisface el primer axioma de numerabilidad el concepto tradicional de convergencia de sucesiones sí logra capturar la topología del espacio. Sin embargo, como ya se mencionó[8]*, esto no es válido en general y hay que recurrir a teorías de convergencia más finas que hagan posible esta captura. Un estudio breve de dos de estas teorías inicia ahora.*

Definición. Una pareja $(D, \leq)$ es un **conjunto dirigido** si $D \neq \varnothing$ y $\leq$ es un **preorden**, i.e.
i) $\leq$ es reflexivo $(d \leq d, \forall d \in D)$.
ii) $\leq$ es transitivo $(d_1 \leq d_2,\ d_2 \leq d_3 \Rightarrow d_1 \leq d_3)$
iii) $\leq$ dirige a D $(\forall d_1, d_2 \in D\ \exists\ d_3 \in D .\ni. d_1 \leq d_3,\ d_2 \leq d_3)$

Ejemplos: 1. $\mathbb{N}$ con el orden usual es un conjunto dirigido.
2. Sea (X, τ) un espacio topológico arbitrario. Para los elementos de $\mathcal{N}_x$ definimos $\leq$ del modo siguiente:

$$U \leq V \Leftrightarrow V \subseteq U$$

Entonces $(\mathcal{N}_x, \leq)$ es un conjunto dirigido. En efecto, para cualesquiera $U, V \in \mathcal{N}_x$ tenemos
i) $U \leq U$, porque $U \subseteq U$
ii) Si $U \leq V$ y $V \leq W$, entonces $V \subseteq U$ y $W \subseteq V$; $\therefore W \subseteq U$; $\therefore U \leq V$
iii) Como $U \cap V \in \mathcal{N}_x$, entonces $U \leq U \cap V$ y $V \leq U \cap V$.@

Sea $(D, \leq)$ un conjunto dirigido arbitrario; para $d \in D$ definimos R_d como

$$R_d = \{d' \in D : d \leq d'\}$$

Definiciones. Sean R y C dos subconjuntos de D arbitrarios.
a) R se llama **residual** si $\exists\ d \in D .\ni. R_d \subseteq R$.
b) C se llama **cofinal** si $\forall d \in D\ \exists\ c \in C .\ni. d \leq c$.

Observación. Todo residual es cofinal, pero no recíprocamente.

En efecto, se R cualquier residual en D; entonces existe $d \in D$ tal que $R_d \subseteq R$. Sea $d_0 \in D$; como D es dirigido, existe $d' \in D$ tal que $d \leq d'$ y $d_0 \leq d'$. Luego, $d' \in R_d$;

$$\therefore \forall d_0 \in D\ \exists\ d' \in R .\ni. d_0 \leq d'$$

lo que significa que R es cofinal.

En $(\mathbb{N}, \leq)$ el conjunto de los números primos es cofinal pero no es residual.@

[8] Recuérdese el comentario del 13 de enero de 1986.

Junio 12 de 1987.

Ejercicio 10. Sean, $(D, \leq)$ un conjunto dirigido arbitrario y E y F dos subconjuntos de D tales que $E \subseteq F$. Pruebe que:
(a_1) si E es residual entonces F es residual
(a_2) si E es cofinal entonces F es cofinal
(b) E es residual $\Leftrightarrow D - E$ no es cofinal.
Sexta tanda de ejercicios: 1. Sea $(D, \leq)$ cualquier conjunto dirigido; pruebe que:
(a) si $d_1, ..., d_n$ son n elementos cualesquiera de D, entonces existe $d \in D$ tal que

$$d_i \leq d, \forall i \in \{1, ..., n\}$$

(b) si $E_1, ..., E_n$ son n subconjuntos residuales de D, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} E_i$ es residual. ¿Es válida la afirmación para cofinales?

LEMA. Sea $(D, \leq)$ cualquier conjunto dirigido; si $D = A \cup B$ y A no es residual, entonces B es cofinal.

Demostración. Por (b) del ejercicio 10, $D - A$ es cofinal; además, $D - A \subseteq B$. Entonces, por (a_2) del mismo ejercicio, B es cofinal.

Definición. Sea $\lambda : (D, \leq) \to (E, \leq)$ una función cualquiera entre conjuntos dirigidos.
(a) Se dice que λ es **creciente** o que **conserva el orden** si $d_1 \leq d_2 \Rightarrow \lambda(d_1) \leq \lambda(d_2)$.
(b) Se dice que λ es **cofinal** si $\forall e \in E \; \exists \; d \in D._{\ni}.e \leq \lambda(d)$.

Ejemplos: 1. Sea $(E, \leq)$ un conjunto dirigido cualquiera y D un subconjunto cofinal en E. Entonces el preorden $\leq$ de E induce un orden en D que también es un preorden. Además, si

$$\lambda : (D, \leq) \to (E, \leq)$$

es la inclusión, entonces:
(a) λ es creciente porque $d_1 \leq d_2 \Rightarrow \lambda(d_1) = d_1 \leq d_2 = \lambda(d_2)$.
(b) λ es cofinal, pues siendo D un subconjunto cofinal de E tenemos

$$\forall e \in E \; \exists \; d \in D._{\ni}.e \leq d$$

y po lo tanto $e \leq \lambda(d)$.

2. Sea $(\mathcal{N}_x, \leq)$ el conjunto dirigido en el que $U \leq V \Leftrightarrow V \subseteq U$. Entonces $\mathcal{B}_x$ es una base local en x si, y sólo si, $\mathcal{B}_x$ es cofinal en $(\mathcal{N}_x, \leq)$. Del ejemplo 1 se sigue la inclusión de $\mathcal{B}_x$ en $\mathcal{N}_x$ es una función creciente y cofinal.

Proposición. Sea $\lambda : D \to E$ una función creciente arbitraria. Son equivalentes:
(a) λ es cofinal.
(b) Para todo residual R en E existe un residual Q en D tal que $\lambda(Q) \subseteq R$.
(c) Para todo residual R en E, $\lambda^{-1}(R)$ es residual en D.

Junio 15 de 1987.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Sea R cualquier residual en E; entonces existe $e \in E$ tal que $R_e \subseteq R$. Por (a) existe $d \in D$ tal que $e \leq \lambda(d)$. Sea $Q = R_d$; entonces Q es residual en D, y si $q \in Q$ entonces $d \leq q$ y $\lambda(d) \leq \lambda(q)$ debido a que λ es creciente.

$$\therefore e \leq \lambda(q); \quad \therefore \lambda(q) \in R_e; \quad \therefore \lambda(Q) \subseteq R.$$

$(b) \Rightarrow (c)$ Sea R cualquier residual en E; por (b) existe un residual Q en D tal que $\lambda(Q) \subseteq R$. Entonces

$$Q \subseteq \lambda^{-1}(\lambda(Q)) \subseteq \lambda^{-1}(R)$$

de modo que, por (a_1) del ejercicio 10, $\lambda^{-1}(R)$ es residual.

$(c) \Rightarrow (a)$ Sea $e \in E$ arbitrario. Como E es dirigido, para e y para cualquier $d' \in D$ existe $e' \in E$ tal que $e \leq e'$ y $\lambda(d') \leq e'$. Consideremos ahora el residual $R_{e'}$ de E; por (c), $\lambda^{-1}(R_{e'})$ es un residual en D, y si $d \in \lambda^{-1}(R_{e'})$ entonces $\lambda(d) \in R_{e'}$ y $e' \leq \lambda(d)$; $\therefore e \leq \lambda(d)$; λ es cofinal.@

Obs. Para probar que $(c) \Rightarrow (a)$ no se usó la hipótesis de que λ es creciente.

10.1.1 Producto Cartesiano de Conjuntos Dirigidos.

Definición. Sean, $(D_i, \leq_i)_I$ una familia arbitraria de conjuntos dirigidos, $D = \prod_{i \in I} D_i$ y $\leq$ un orden en D definido del modo siguiente:

$$(I, f) \leq (I, f') \Leftrightarrow f(i) \leq_i f'(i), \forall i \in I$$

Proposición. $(D, \leq)$ es dirigido.

Demostración. i) $(I, f) \leq (I, f)$ porque $f(i) \leq_i f(i), \forall i \in I$.

ii) $(I, f) \leq (I, f')$ e $(I, f') \leq (I, f'') \Rightarrow f(i) \leq_i f'(i)$ y $f'(i) \leq_i f''(i)$; $\therefore f(i) \leq_i f''(i)$; $\therefore (I, f) \leq (I, f'')$

iii) Sean $(I, f), (I, f') \in D$ cualesquiera. Como cada D_i es dirigido,

$$\forall i \in I \; \exists \; d_i \in D_i . \ni . f(i) \leq_i d_i \text{ y } f'(i) \leq_i d_i$$

Sea $(I, f'') \in D$ tal que $f''(i) = d_i$; entonces

$$f(i), f'(i) \leq_i f''(i), \forall i \in I$$

$$\therefore (I, f) \leq (I, f'') \quad \text{e} \quad (I, f') \leq (I, f'')$$ @

Ejemplo. Sean $(D_1, \leq_1)$ y $(D_2, \leq_2)$ dos conjuntos dirigidos cualesquiera. Sea $D = D_1 \times D_2$;

$$(d_1, d_2) \leq (d_1', d_2') \Leftrightarrow d_1 \leq_1 d_1' \text{ y } d_2 \leq_2 d_2'$$

Entonces $(D_1 \times D_2, \leq)$ es el **producto dirigido** de $(D_1, \leq_1)$ y $(D_2, \leq_2)$.

Definiciones. (a) Sea X un conjunto arbitrario; una **red** en X es cualquier función de codominio X cuyo dominio sea un conjunto dirigido.

(b) Sea (X, τ) un espacio topológico arbitrario y $x \in X$. Decimos que la red

$$\varphi : (D, \leq) \to (X, \tau)$$

converge a x si para toda $U \in \mathcal{N}_x$ existe un residual R_U en D tal que $\varphi(R_U) \subseteq U$. Tal situación la denotaremos escribiendo: $\varphi \to x$

Junio 17 de 1987.

(c) Sea $\varphi : (D, \leq) \to (X, \tau)$ una red arbitraria y $x \in X$; x se llama **punto de aglomeración de** φ si para toda $U \in \mathcal{N}_x$ y para cualquier $d_0 \in D$ existe $d \in D$ tal que $d_0 \leq d$ y $\varphi(d) \in U$.

Ejemplos: 1. En un espacio topológico X, una sucesión $\varphi : \mathbb{N} \to X$ que converge a x es una red que converge a x. En efecto, según la definición de convergencia[9]

$$\forall U \in \mathcal{N}_x \exists \; n_U \in \mathbb{N} . \ni . n \geq n_U \Rightarrow \varphi(n) \in U$$

lo cual significa que existe un residual R_U en $\mathbb{N}$, $R_U = R_{n_U}$, y que $\varphi(R_{n_U}) \subseteq U$.

2. Un punto de aglomeración de la sucesión φ sigue siéndolo aún visualizando a ésta como red[10].

3. Si $\varphi : \mathcal{N}_x \to X$ es tal que $\varphi(U) \in U$, entonces φ converge a x.

En efecto, sea $U \in \mathcal{N}_x$ y sea

$$R_U = \{V \in \mathcal{N}_x \mid U \leq V\} \text{ i.e. } R_U = \{V \in \mathcal{N}_x \mid V \subseteq U\}$$

Por definición, R_U es residual en $\mathcal{N}_x$, y si $V \in R_U$ entonces $\varphi(V) \in U$. Por lo tanto, $\varphi(R_U) \subseteq U$; por lo tanto φ converge a x.@

Proposición. Si φ converge a x entonces x es punto de aglomeración de φ, pero no recíprocamente.

Demostración. Sean, $U \in \mathcal{N}_x$, $d_0 \in D$ y considérese el residual R_{d_0} en D. Dado que φ converge a x, existe un residual $R_U \subseteq D$ tal que $\varphi(R_U) \subseteq U$. Como R_U es residual, $D - R_U$ no es cofinal; luego, $R_{d_0} \not\subseteq D - R_U$.

[9] Enero 13 de 1986.

[10] Véase la definición del 1º de junio de "este" año.

Sea $d \in R_{d_0}$ tal que $d \notin D - R_U$; entonces $d_0 \leq d$ y $d \in R_U$; $\therefore \varphi(d) \in U$, lo cual prueba que x es punto de aglomeración de φ.

El recíproco es falso; tómese, por ejemplo, una sucesión (de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$, digamos). Es un caso particular de red, y sabemos que con más de un punto de aglomeración la sucesión no es convergente.@

Definición. Sean, X un conjunto y $\varphi : D \to X$ una red, arbitrarios. La composición $\varphi\lambda$ de φ con cualquier función creciente y cofinal $\lambda : E \to D$ se llama **sub-red** de φ.

Ejemplos: 1. En una sucesión $\varphi : \mathbb{N} \to X$ toda subsucesión o sucesión parcial es una sub-red de φ, pero no recíprocamente.

En efecto, si $\varphi(n) = x_n$ y $\{x_{n_m}\}$ es una sucesión parcial de $\{x_n\}$, entonces

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_m < \cdots$$

y

$$N = \{n_m \mid m \in \mathbb{N}\}$$

es cofinal en $\mathbb{N}$ y, por lo tanto, un conjunto dirigido con el orden inducido. Luego, la inclusión

$$\lambda : N \to \mathbb{N}$$

es una función creciente y cofinal y, de acuerdo a la definición anterior, $\varphi\lambda$ es una sub-red de φ. Y como

$$\varphi\lambda(n_m) = \varphi(n_m) = x_{n_m}$$

entonces, efectivamente, $\{x_{n_m}\}$ es una sub-red de φ.

Sin embargo, si $\lambda : E \to \mathbb{N}$ es creciente y cofinal, entonces $\varphi\lambda : E \to X$ es una sub-red pero no necesariamente una sucesión parcial porque E es un conjunto dirigido arbitrario (que puede no tener nada que ver con $\mathbb{N}$); por eso el recíproco no siempre es verdadero.@

Junio 19 de 1987.

2. Sea $\varphi : D \to X$ una red en un espacio topológico X y sea x un punto de aglomeración de φ. Pensemos en el sistema de vecindades $\mathcal{N}_x$ de este punto y consideremos el conjunto

$$E = \{(d, U) \in D \times \mathcal{N}_x \mid \varphi(d) \in U\}$$

Entonces E es cofinal en $D \times \mathcal{N}_x$, porque al ser x un punto de aglomeración de φ tenemos que

$$\forall (d, U) \in D \times \mathcal{N}_x \exists\, d' \in D . \ni . d \leq d' \text{ y } \varphi(d') \in U$$

$$\therefore (d', U) \in E \quad \text{y} \quad (d, U) \leq (d', U)$$

Por consiguiente, E con el orden inducido resulta ser un conjunto dirigido (no olvidemos que cualquier subconjunto cofinal de un conjunto dirigido también es dirigido con el orden inducido). Por otra parte,

$$\begin{array}{ccc} E & \overset{\lambda}{\to} & D \\ (d, U) & \mapsto & d \end{array}$$

es una función creciente y cofinal porque

$$(d, U) \leq (d', U') \Rightarrow \lambda(d, U) = d \leq d' = \lambda(d', U')$$

(i.e. λ es creciente); y como x es punto de aglomeración de φ

$$\forall d \in D, U \in \mathcal{N}_x \exists\, d' \in D . \ni . d \leq d' \text{ y } \varphi(d') \in U$$

$$\therefore (d', U) \in E \quad \text{y} \quad d \leq \lambda(d', U)$$

(i.e. λ es cofinal). Luego, tenemos una sub-red $\varphi\lambda : E \to X$; esta sub-red es especial cuando φ posee un punto de aglomeración.

Proposición. Sea $\varphi : D \to X$ cualquier red en el espacio topológico X; son equivalentes:

a) x es punto de aglomeración de φ.

b) Existe una sub-red de φ que converge a x.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Consideremos para φ la sub-red $\varphi\lambda$ del ejemplo anterior. Vamos a probar que $\varphi\lambda \to x$. Sea $U \in \mathcal{N}_x$; por (a), existe $d \in D$ tal que $\varphi(d) \in U$. Luego, $(d, U) \in E$ y $R_{(d,U)}$ define un residual en E; además, si $(d', U') \in R_{(d,U)}$ entonces

$$\varphi\lambda(d', U') = \varphi(d') \in U' \subseteq U$$

$$\therefore \varphi\lambda\left(R_{(d,U)}\right) \subseteq U$$

lo que significa que $\varphi\lambda$ converge a x.

$(b) \Rightarrow (a)$ Sea $(d, U) \in D \times \mathcal{N}_x$; hay que probar que existe $d' \in D$ tal que $d \leq d'$ y $\varphi(d') \in U$. Por (b) existe una sub-red

$$E \xrightarrow{\lambda} D \xrightarrow{\varphi} X$$

que converge a x. Luego, para U existe un residual $Q \subseteq E$ tal que $\varphi\lambda(Q) \subseteq U$. Por otra parte, como λ es cofinal, para d existe $e \in E$ tal que $d \leq \lambda(e)$; pero Q es residual en E, de manera que existe $e' \in Q$ tal que $e \leq e'$. Como además λ es creciente, tenemos

$$d \leq \lambda(e') \in \lambda(Q)$$

Esto significa que $\lambda(Q)$ es cofinal en D, pues d es arbitrario. Sea $d' = \lambda(e')$; entonces

$$\varphi(d') \in \varphi\lambda(Q) \subseteq U$$

y así queda demostrado que x es punto de aglomeración de φ.@

<u>*Ejercicio*</u> 2. Sea $\varphi : D \to X$ una red en el espacio topológico X. Probar que son equivalentes:

a) x es punto de aglomeración de φ.

b) $\varphi^{-1}(U)$ es cofinal en D, $\forall U \in \mathcal{N}_x$.

10.1.2 Determinación de la topología de un espacio por redes convergentes.

Junio 22 de 1987.

Teorema. Sea (X, τ) un espacio topológico arbitrario y sea $A \subseteq X$. Entonces:

a) La cerradura de A la forman los puntos del espacio a los cuales converge cualquier red que tenga imagen en A; en símbolos:

$$\overline{A} = \{x \in X \mid \exists\varphi : D \to X.\ni.\varphi(D) \subseteq A \text{ y } \varphi \to x\}$$

b) A es cerrado si, y sólo si, toda red convergente con imagen en A converge a un punto de A.

Demostración.(a) $\subseteq$) Sea $x \in \overline{A}$; entonces

$$U \cap A \neq \varnothing, \forall U \in \mathcal{N}_x$$

Sean, $(\mathcal{N}_x, \leq)$ el conjunto dirigido en el que $U \leq V \Leftrightarrow V \subseteq U$ y $\varphi : \mathcal{N}_x \to X$ una red tal que

$$\varphi(U) \in U \cap A, \forall U \in \mathcal{N}_x$$

Entonces φ converge a x[11] y $\varphi(\mathcal{N}_x) \subseteq A$.

$\supseteq$) Supongamos que $\varphi : D \to X$ es una red que converge a x y que $\varphi(D) \subseteq A$. Sea $U \in \mathcal{N}_x$; entonces existe un residual R en D tal que $\varphi(R) \subseteq U$. Pero además

$$\varphi(R) \subseteq \varphi(D) \subseteq A$$

Luego, $\varphi(R) \subseteq U \cap A$; y como $\varphi(R) \neq \varnothing$ (R no es vacío), entonces $U \cap A \neq \varnothing$. Por lo tanto, $x \in \overline{A}$.

---

[11] Véase el ejemplo 3 de la clase del día 17.

(b) $\Rightarrow$) Si $\varphi : D \to X$ es una red que converge a x y $\varphi(D) \subseteq A$, por (a), $x \in \overline{A}$. Si además A es cerrado, entonces $\overline{A} = A$; luego, $x \in A$.

$\Leftarrow$) Supongamos que A es tal que siempre que una red convergente tiene rango en A entonces el punto al que converge es un punto de A. Entonces

$$\{x \in X \mid \exists \varphi : D \to X. \ni .\varphi(D) \subseteq A \text{ y } \varphi \to x\} \subseteq A$$

Por (a), esto significa que $\overline{A} \subseteq A$, lo cual implica que A es cerrado.@

Este teorema justifica al concepto de red convergente como un concepto básico de la topología porque hace ver que con él se consigue aprehender la noción de cercanía que topológicamente rige en cada espacio. Siendo básico, ha de poderse caracterizar cualquier otro concepto topológico a través suyo. Verbigracia: el concepto de función continua.

Junio 28 de 1987.

Teorema. Sean, $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ una función arbitraria y $x_0 \in X$. Son equivalentes:

a) f es continua en x_0.

b) Si $\varphi : D \to X$ es una red que converge a x_0, entonces la red $f\varphi : D \to Y$ converge a $f(x_0)$.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Sean, $\varphi : D \to X$ una red que converge a x_0 y $V \in \mathcal{N}_{f(x_0)}$. Por (a), $f^{-1}(V) \in \mathcal{N}_x$; por lo tanto existe un residual $R \subseteq D$ tal que $\varphi(R) \subseteq f^{-1}(V)$. Entonces $f\varphi(R) \subseteq V$, lo que significa que $f\varphi$ converge a $f(x_0)$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Supongamos que f es discontinua en x_0. Entonces existe $V \in \mathcal{N}_{f(x_0)}$ tal que $f^{-1}(V) \notin \mathcal{N}_{x_0}$. Entonces

$$U - f^{-1}(V) \neq \varnothing, \forall U \in \mathcal{N}_{x_0}$$

Sea

$$\varphi : \mathcal{N}_{x_0} \to X. \ni .\varphi(U) \in U - f^{-1}(V)$$

Se sabe que φ converge a x_0. Por (b), $f\varphi$ debe converger a $f(x_0)$ y por lo tanto para V debe existir un residual R en $\mathcal{N}_{x_0}$ tal que $f\varphi(R) \subseteq V$. Entonces

$$\varphi(R) \subseteq f^{-1}(V)$$

$$\therefore \varphi(U) \in f^{-1}(V), \forall U \in R \underset{\circ}{\nabla}$$

Esta contradicción prueba que si pasa (b) f debe ser continua en x_0.@

Teorema. Sean, $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ una familia cualquiera de espacios topológicos y $\varphi : D \to \prod_{\lambda \in \Lambda} (X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ una red arbitraria. Entonces

$$\varphi \to (\Lambda, f) \Leftrightarrow P_\lambda \varphi \to f(\lambda), \forall \lambda \in \Lambda.$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que $\varphi \to (\Lambda, f)$. Como P_λ es una función continua, del teorema anterior se tiene que $P_\lambda \varphi \to P_\lambda(\Lambda, f) = f(\lambda)$.

($\Leftarrow$) En esta parte nos valdremos del hecho de que si $\varphi : (D, \leq) \to (X, \tau)$ es cualquier red y $x \in X$, entonces

$$\varphi \to x \Leftrightarrow \varphi^{-1}(U) \text{ es residual en } D, \forall U \in \mathcal{N}_x$$

Sea

$$P_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap P_{\lambda_2}^{-1}(U_{\lambda_2}) \cap \cdots \cap P_{\lambda_n}^{-1}(U_{\lambda_n}) \in \mathcal{N}_{(\Lambda, f)}$$

De acuerdo con la hipótesis tenemos que $P_{\lambda_i}\varphi \to f(\lambda_i)$. Luego,

$$(P_{\lambda_i}\varphi)^{-1}(U_{\lambda_i}) = \varphi^{-1} P_{\lambda_i}^{-1}(U_{\lambda_i})$$

es un residual en D. En consecuencia

$$\varphi^{-1} P_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap \cdots \cap \varphi^{-1} P_{\lambda_n}^{-1}(U_{\lambda_n}) = \varphi^{-1}\left(P_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap \cdots \cap P_{\lambda_n}^{-1}(U_{\lambda_n})\right)$$

es un residual en D [ejercicio 1(b)], lo que significa que φ converge a (Λ, f).@

Definición. Sea $\varphi : D \to X$ una red en el conjunto X. Se dice que φ es una **ultrarred** cuando para todo $A \subseteq X$, $\varphi^{-1}(A)$ ó $\varphi^{-1}(X - A)$ es un residual en D.

Ejemplo: Sean, $\varphi : D \to X$ la red constante de valor x y $A \subseteq X$. Entonces

$$\varphi^{-1}(A) = D, \text{ si } x \in A$$
$$\varphi^{-1}(X - A) = D, \text{ si } x \notin A$$

Por lo tanto φ es una ultrarred.

Este ejemeplo muestra que el concepto de ultrarred no es un concepto vacío.

Proposición. Sea $f : X \to Y$ una función arbitraria. Si $\varphi : D \to X$ es ultrarred, entonces también $f\varphi : D \to Y$ es ultrarred.

Demostración. Sea $B \subseteq Y$; como $f^{-1}(B)$ y $f^{-1}(Y - B)$ son mutuamente complementarios en X y φ es ultrarred, entonces

$$\varphi^{-1}\left(f^{-1}(B)\right) \quad \text{ó} \quad \varphi^{-1}\left(f^{-1}(Y - B)\right)$$

es residual en D, lo que significa que $f\varphi$ es ultrarred.@

Julio 3 de 1987.

Proposición. Sea $\varphi : D \to (X, \tau)$ una ultrarred arbitraria. Si x es punto de aglomeración de φ, entonces φ converge a x.

Demostración. Sea $U \in \mathcal{N}_x$; se sabe que $\varphi^{-1}(U)$ es cofinal en D (ejercicio 2), y como φ es ultrarred, entonces ó $\varphi^{-1}(U)$ es residual en D ó $\varphi^{-1}(X - U)$ lo es. Pero si $\varphi^{-1}(U)$ es cofinal, entonces

$$D - \varphi^{-1}(U) = \varphi^{-1}(X - U)$$

no es residual en D. Luego, $\varphi^{-1}(U)$ es residual y por lo tanto φ converge a x.@

Teorema. Sea (X, τ) un espacio topológico arbitrario. Son equivalentes:

(a) X es compacto.

(b) Toda red $\varphi : D \to X$ posee al menos un punto de aglomeración.

(c) Toda ultrarred en X es convergente.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Sea $\varphi : D \to X$ una red arbitraria. Si φ no tuviera ningún punto de aglomeración, por el resultado del ejercicio 2, para cada $x \in X$ existiría $U_x \in \mathcal{N}_x^\circ$ tal que $\varphi^{-1}(U_x)$ no es cofinal en D o, lo que es lo mismo, que $D - \varphi^{-1}(U_x)$ es residual en D; esta familia $(U_x)_X$ constituye, desde luego, una cubierta abierta de X y, por (a), de ella puede extraerse una subcubierta finita

$$\{U_{x_1}, U_{x_2}, ..., U_{x_n}\}$$

Si además

$$R = \bigcap_{i=1}^{n} \left[D - \varphi^{-1}(U_{x_i})\right]$$

entonces R es residual y

$$R \subseteq D - \varphi^{-1}(U_{x_i}) = \varphi^{-1}(X - U_{x_i})$$
$$\therefore \varphi(R) \subseteq X - U_{x_i}, \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$$
$$\therefore \varphi(R) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} (X - U_{x_i}) = X - \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} = \varnothing \ \underset{\circ}{\nabla}$$

Contradicción, porque $\varphi(R) \neq \varnothing$. Luego, φ posee al menos un punto de aglomeración.

$(b) \Rightarrow (a)$ Sea $\mathcal{U} = (U_i)_I$ una cubierta abierta arbitraria de X y supongamos que $X - \bigcup_{i \in J} U_i \neq \varnothing$ para cualquier $J \subseteq I$ finito. Sea D el conjunto cuyos elementos son los subconjuntos finitos de I con el orden siguiente:

$$J_1 \leq J_2 \Leftrightarrow J_1 \subseteq J_2$$

Es claro que $\leq$ es reflexivo y transitivo; además dirige a D ya que

$$J_1, J_2 \in D \Rightarrow J_1, J_2 \subseteq J_1 \cup J_2 \in D$$

Sea $\varphi : D \to X$ una red tal que

$$\varphi(J) \in X - \bigcup_{i\in J} U_i$$

Por (b), φ posee al menos un punto de aglomeración $x \in X$; luego, $x \in U_{i_0}$, p.a. $i_0 \in I$ y $\varphi^{-1}(U_{i_0})$ es cofinal en D;

$$\therefore \forall J' \in D \ \exists\ J \in \varphi^{-1}(U_{i_0}) \,.\!\ni\!.\, J' \leq J$$

En particular si $J' = \{i_0\}$ y J es el elemento de $\varphi^{-1}(U_{i_0})$ tal que $\{i_0\} \leq J$, entonces $i_0 \in J$; pero

$$\varphi(J) \in X - \bigcup_{i\in J} U_i = \bigcap_{i\in J}(X - U_i)$$

$$\therefore \varphi(J) \in X - U_{i_0}$$

$$\therefore J \in \varphi^{-1}(X - U_{i_0}) = D - \varphi^{-1}(U_{i_0}) \ \underset{\circ}{\nabla}$$

Luego, falso suponer $X - \bigcup_{i\in J} U_i \neq \varnothing, \forall J \subseteq I$ finito. Por lo tanto, $\mathcal{U}$ posee una subcubierta finita y X es compacto.

$(b) \Rightarrow (c)$ Sea φ una ultrarred en X. Por (b), φ posee al menos un punto de aglomeración $x \in X$ y, por la proposición anterior, φ converge a x.

La prueba de que (c) implica alguno de los otros dos incisos la dejaremos para otro día.$_{[@]}$

10.2 Filtros

Julio 20 de 1987.

Definición[12]**.** Un **filtro** en un conjunto no vacío X es una familia no vacía $\mathcal{F}$ de subconjuntos no vacíos de X tal que

(i) $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.

(ii) $F_1 \subseteq F_2$ y $F_1 \in \mathcal{F} \Rightarrow F_2 \in \mathcal{F}$.

Ejemplo: $\{X\}$ es el filtro más pequeño que hay en X. En efecto,

(i) $F_1, F_2 \in \{X\} \Rightarrow F_1 = F_2 = X \Rightarrow F_1 \cap F_2 = X \in \{X\}$.

(ii) $F_1 \subseteq F_2$ y $F_1 \in \{X\} \Rightarrow F_2 \supseteq X \Rightarrow F_2 = X \in \{X\}$.

Por lo tanto, $\{X\}$ es un filtro. Y es el más pequeño porque cuando $\mathcal{F}$ es cualquier filtro en X, entonces ni X es vacío (porque los filtros se definen para conjuntos no vacíos) ni lo es $\mathcal{F}$ (porque los filtros son familias no vacías); por lo tanto, existe algún $F \in \mathcal{F}$ y $F \subseteq X$. Por (ii) de la definición, $X \in \mathcal{F}$; $\therefore \{X\} \subseteq \mathcal{F}$. Este sencillo hecho de que X siempre es miembro de cualquier filtro en X, aunque fácil de ver, tendrá mucha relevancia en lo sucesivo.

Definición. Una **base de filtro** en X es una familia no vacía $\mathcal{B}$ de subconjuntos no vacíos de X tal que

$$B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow \exists\ B_3 \in \mathcal{B} .\!\ni\!. B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$$

Obs. Es claro que todo filtro es una base de filtro.

Teorema. Si $\mathcal{B}$ es una base de filtro, entonces

$$\mathcal{F} = \{F \subseteq X : B \subseteq F,\ p.a. B \in \mathcal{B}\ \}$$

es un filtro en X.

Demostración. Por definición de base de filtro, $\mathcal{B} \neq \varnothing$; $\therefore \mathcal{F} \neq \varnothing$. Y si $F \in \mathcal{F}$, entonces existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq F$; luego, $F \neq \varnothing$ porque $B \neq \varnothing$. Así, $\mathcal{F}$ es una familia no vacía de subconjuntos no vacíos de X. Ahora bien:

(i) $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow \exists\ B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $B_1 \subseteq F_1, B_2 \subseteq F_2$; por lo tanto existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que

$$B_3 \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq F_1 \cap F_2$$

[12] Para quienes no les gusta el vacío...

$$\therefore F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$$

(ii) $F_1 \in \mathcal{F} \Rightarrow F_1 \supseteq B_1 \in \mathcal{B}$. Y si $F_2 \supseteq F_1$, entonces $F_2 \supseteq B_1$; $\therefore F_2 \in \mathcal{F}$.

A $\mathcal{F}$ se le llama **filtro generado por** $\mathcal{B}$. Observemos lo siguiente: si $\mathcal{F}'$ es otro filtro que contiene a $\mathcal{B}$ y $F \in \mathcal{F}$, entonces

$$F \supseteq B \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}'$$

de lo cual resulta que $F \in \mathcal{F}'$ y, por lo tanto, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$. Esto significa que el filtro generado por $\mathcal{B}$ es el más pequeño que contiene a $\mathcal{B}$.

Julio 22 de 1987.

Ejemplos: 1.Sea A un subconjunto no vacío de X; entonces

$$\mathcal{F} = \{F \subseteq X : A \subseteq F\}$$

es un filtro en X.

(i) $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow A \subseteq F_1$ y $A \subseteq F_2$; $\therefore A \subseteq F_1 \cap F_2$; $\therefore F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.

(ii) $F_1 \subseteq F_2$ y $F_1 \in \mathcal{F} \Rightarrow A \subseteq F_2$; $\therefore F_2 \in \mathcal{F}$.

Observación. Este filtro tiene como característica que $\cap\mathcal{F} \neq \varnothing$.

2. Sea X un espacio topológico arbitrario y A un subconjunto no vacío de X; entonces

$$\mathcal{F} = \{F \subseteq X : A \subseteq F^\circ\}$$

es un filtro en X.

(i) $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow A \subseteq F_1^\circ$ y $A \subseteq F_2^\circ$; $\therefore A \subseteq F_1^\circ \cap F_2^\circ = (F_1 \cap F_2)^\circ$; $\therefore F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.

(ii) $F_1 \subseteq F_2$ y $F_1 \in \mathcal{F} \Rightarrow A \subseteq F_1^\circ \subseteq F_2^\circ$; $\therefore F_2 \in \mathcal{F}$.

Observación. Tampoco aquí es vacía la intersección sobre $\mathcal{F}$, ya que $\varnothing \neq A \subseteq \cap\mathcal{F}$. Observemos también que si $A = \{x\}$, entonces $\mathcal{F} = \mathcal{N}_x$.

3. Sea

$$\mathcal{B} = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$$

Entonces $\mathcal{B}$ es base de filtro. En efecto, si $(a, \infty), (b, \infty) \in \mathcal{B}$ y $c = \max\{a, b\}$, entonces $(c, \infty) \in \mathcal{B}$ y $(c, \infty) \subseteq (a, \infty) \cap (b, \infty)$. $\mathcal{B}$ no es un filtro porque si $x < a$, entonces

$$(a, \infty) \subseteq \{x\} \cup (a, \infty) \notin \mathcal{B}$$

El filtro $\mathcal{F}$ generado por $\mathcal{B}$ se llama **filtro de Frechet**. Tiene la particularidad de que $\cap\mathcal{B} = \emptyset$ y, por lo tanto, $\cap\mathcal{F} = \emptyset$.

Definiciones. Sean $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ filtros en un conjunto X.

a) Se dice que $\mathcal{F}$ **es fijo** si $\cap\mathcal{F} \neq \varnothing$, y se dice que $\mathcal{F}$ **es libre** si $\cap\mathcal{F} = \emptyset$.

b) Cuando $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ se dice que $\mathcal{F}_2$ **es más fino que** $\mathcal{F}_1$.

c) Cuando X es un espacio topológico y $\mathcal{F}$ es más fino que $\mathcal{N}_x$ se dice que $\mathcal{F}$ **converge a** x.

d) Finalmente, diremos que x es **punto de aglomeración de** $\mathcal{F}$ si

$$F \cap U \neq \varnothing, \forall F \in \mathcal{F}, \forall U \in \mathcal{N}_x$$

Nota: $\mathcal{F} \to x$ denotará que $\mathcal{F}$ converge a x.

TEOREMA. Sea X un espacio topológico y $x \in X$.

(a) Si $\mathcal{F} \to x$ entonces x es punto de aglomeración de $\mathcal{F}$, pero no recíprocamente.

Si $\mathcal{B}$ es una base de filtro y $\mathcal{F}$ es el filtro generado por $\mathcal{B}$, entonces

(b)

$$\mathcal{F} \to x \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{N}_x \exists\ B \in \mathcal{B}.\ni.B \subseteq U$$

(c) x es punto de aglomeración de $\mathcal{F}$ si, y solamente si,

$$B \cap U \neq \varnothing, \forall B \in \mathcal{B}, \forall U \in \mathcal{N}_x$$

Demostración. (a) Si $\mathcal{F} \to x$ entonces $\mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{F}$; $\therefore F \in \mathcal{F} \Rightarrow F \cap U \in \mathcal{F}, \forall U \in \mathcal{N}_x$; $\therefore F \cap U \neq \varnothing$; $\therefore x$ es punto de aglomeración de $\mathcal{F}$.

(b) $(\Rightarrow)$ Sea $U \in \mathcal{N}_x$; entonces $U \in \mathcal{F}$, que es generado por $\mathcal{B}$. Por lo tanto, $U \supseteq B$, p.a.$B \in \mathcal{B}$.

$(\Leftarrow)$ Sea $U \in \mathcal{N}_x$; por hipótesis existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq U$. Pero $B \in \mathcal{F}$; luego, $U \in \mathcal{F}$. Por lo tanto, $\mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{F}$ y $\mathcal{F} \to x$.

(c) $(\Rightarrow)$ Sean $B \in \mathcal{B}$ y $U \in \mathcal{N}_x$. Entonces $B \in \mathcal{F}$; $\therefore B \cap U \neq \varnothing$.

$(\Leftarrow)$ Sean $F \in \mathcal{F}$ y $U \in \mathcal{N}_x$. Entonces $F \supseteq B$, p.a.$B \in \mathcal{B}$; luego, $F \cap U \neq \varnothing$ ya que

$$F \cap U \supseteq B \cap U \neq \varnothing$$

Por lo tanto x es punto de aglomeración de $\mathcal{F}$.@

Julio 24 de 1987.

<u>Ejercicios:</u> 3. Sea $\mathcal{B}$ una base de filtro y $\mathcal{F}$ el filtro generado por $\mathcal{B}$. Si $\mathcal{B}'$ es tal que

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{F}$$

pruebe que $\mathcal{B}'$ también es una base de filtro y que $\mathcal{F}$ es el filtro generado por $\mathcal{B}'$.

4. Si $(\mathcal{F}_i)_I$ es una familia no vacía de filtros en X y

$$\mathcal{F} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$$

pruebe que $\mathcal{F}$ es un filtro en X.

5. Si A es una familia de de subconjuntos de X contenida en algún filtro, pruebe que existe un filtro mínimo que contiene a A.

Teorema. Sea $\mathcal{F}$ un filtro en el espacio topológico X y $x \in X$. Son equivalentes:

(a) x es punto de aglomeración de $\mathcal{F}$

(b) Existe un filtro $\mathcal{G}$ más fino que $\mathcal{F}$ que converge a x.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Por hipótesis, $F \cap U \neq \varnothing, \forall F \in \mathcal{F}, \forall U \in \mathcal{N}_x$. En consecuencia

$$\{F \cap U \mid F \in \mathcal{F}, U \in \mathcal{N}_x\}$$

es una familia no vacía de subconjuntos no vacíos de X; además, para cualesquiera dos de sus miembros tenemos

$$(F_1 \cap U_1) \cap (F_2 \cap U_2) = (F_1 \cap F_2) \cap (U_1 \cap U_2)$$

que vuelve a ser miembro de la familia. Esto significa que ésta es una base de filtro. Sea $\mathcal{G}$ el filtro generado por ella. Entonces

$$F \cap X = F \in \mathcal{G}, \forall F \in \mathcal{F}$$

Por lo tanto, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Y si $F = X$, tenemos

$$X \cap U = U \in \mathcal{G}, \forall U \in \mathcal{N}_x$$

Por lo tanto, $\mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{G}$; por lo tanto, $\mathcal{G} \to x$.

$(b) \Rightarrow (a)$ Sean $F \in \mathcal{F}$, $U \in \mathcal{N}_x$; por (b), $F, U \in \mathcal{G}$. Luego, $F \cap U \in \mathcal{G}$; $\therefore F \cap U \neq \varnothing$. Por lo tanto, x es punto de aglomeración de $\mathcal{F}$.@

10.2.1 Determinación de la topología de un espacio por filtros convergentes.

El siguiente teorema muestra que también el concepto de filtro es un concepto básico de la topología.

Teorema. Sea (X, τ) un espacio topológico arbitrario y sea $A \subseteq X, A \neq \varnothing$. Entonces $\overline{A}$ consta de todos aquellos puntos a los que converja cualquier filtro que tenga a A como uno de sus miembros; en símbolos:

$$\overline{A} = \{x \in X \mid \exists\ \mathcal{F} \to x.\ni.A \in \mathcal{F}\}$$

Demostración. $(\subseteq)$ Sea $x \in \overline{A}$ y sea

$$\mathcal{F} = \{F \subseteq X : A \subseteq F\}$$

Se sabe que $\mathcal{F}$ es un filtro. Por otra parte, como $x \in \overline{A}$, entonces $A \cap U \neq \varnothing, \forall U \in \mathcal{N}_x$; luego

$$F \cap U \neq \varnothing, \forall F \in \mathcal{F}, \forall U \in \mathcal{N}_x$$

lo que significa que x es punto de aglomeración de $\mathcal{F}$. Por el teorema anterior existe un filto $\mathcal{G}$ más fino que $\mathcal{F}$ $(\therefore A \in \mathcal{G})$ tal que $\mathcal{G} \to x$.

$(\supseteq)$ Sea $x \in X$ y supongamos que existe un filtro $\mathcal{G}$ tal que $A \in \mathcal{G}$ y $\mathcal{G} \to x$. Entonces

$$A \cap U \in \mathcal{G}, \forall U \in \mathcal{N}_x; \ \therefore A \cap U \neq \varnothing, \forall U \in \mathcal{N}_x$$

lo cual significa que $x \in \overline{A}$, como se quería probar.@

Definición. Sea X un conjunto. A un filtro $\mathcal{F}$ en X se le da el nombre de **ultrafiltro** si no existe filtro alguno estrictamente más fino que $\mathcal{F}$.

Teorema. Sea $\mathcal{F}$ un filtro cualquiera en X; son equivalentes:

(a) $\mathcal{F}$ es ultrafiltro.

(b) $A \subseteq X \Rightarrow A \in \mathcal{F}$ ó $X - A \in \mathcal{F}$.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Por hipótesis $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro. Sea $A \subseteq X$ y supongamos que $A \notin \mathcal{F}$; entonces

$$F \cap (X - A) \neq \varnothing, \forall F \in \mathcal{F}$$

ya que si para algún miembro de $\mathcal{F}$ se tuviese $F \cap (X - A) = \varnothing$, entonces $F \subseteq A$ y $A \in \mathcal{F}$. Por consiguiente

$$\{F \cap (X - A) : F \in \mathcal{F}\}$$

es una familia no vacía de subconjuntos no vacíos de X que además es base de filtro porque para cualesquiera $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ tenemos

$$[F_1 \cap (X - A)] \cap [F_2 \cap (X - A)] = (F_1 \cap F_2) \cap (X - A)$$

que es miembro de la misma familia. Sea $\mathcal{G}$ el filtro generado por ella; entonces $(X - A) \in \mathcal{G}$, y como $F \cap (X - A) \subseteq F$, entonces $F \in \mathcal{G}$; $\therefore \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Pero $\mathcal{F}$ es ultrafiltro; luego, $\mathcal{G}$ no puede ser estrictamente más fino que $\mathcal{F}$. Por lo tanto, también $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, i.e. $\mathcal{F} = \mathcal{G}$, de donde resulta que $(X - A) \in \mathcal{F}$.

$(b) \Rightarrow (a)$ Sea $\mathcal{G}$ cualquier filtro más fino que $\mathcal{F}$. Entonces

$$G \in \mathcal{G} \Rightarrow (X - G) \notin \mathcal{F}$$

de modo que, aplicando (b), $G \in \mathcal{F}$. Por lo tanto, $\mathcal{G} = \mathcal{F}$; por lo tanto, $\mathcal{F}$ es ultrafiltro.@

Para mostrar que el concepto de ultrafiltro no es un concepto vacío veamos un ejemplo:

Sea $x \in X$ fijo. Entonces el filtro

$$\mathcal{F} = \{F \subseteq X : x \in F\}$$

es un ultrafiltro, ya que si $A \subseteq X$ entonces

$$x \in A \Rightarrow A \in \mathcal{F} \quad \text{y}$$
$$x \notin A \Rightarrow X - A \in \mathcal{F}$$

Como ya hicimos notar, en este caso $\cap\mathcal{F} \neq \varnothing$; luego, este es un ejemplo de ultrafiltro fijo. Hasta la fecha[13] no se conoce ejemplo de ultrafiltro libre.

Julio 27 de 1987.

Ejercicio: 6. Sean X y Y dos conjuntos cualesquiera y $f : X \to Y$ una función arbitraria. Probar que si $\mathcal{B}$ es una base de filtro en X, entonces

$$f(\mathcal{B}) = \{f(B) : B \in \mathcal{B}\}$$

es una base de filtro en Y.

[13] y aún hasta hoy

Definición. Sea $f : X \to Y$ una función arbitraria. Se sabe que todo filtro es base de filtro; de acuerdo al ejercicio anterior, si $\mathcal{F}$ es un filtro en X entonces

$$\{f(F) : F \in \mathcal{F}\}$$

es una base de filtro en Y. El filtro en Y generado por esta base se llama **imagen del filtro** $\mathcal{F}$ **según** f y se denota por $f(\mathcal{F})$.

Denotándolo así cometemos un abuso en la escritura porque, según el ejercicio 6, $f(\mathcal{F})$ debe denotar a la base $\{f(F) : F \in \mathcal{F}\}$. Hecha esta aclaración no caben ya ambigüedad ni confusión alguna cuando encontremos escrito $f(\mathcal{F})$.

TEOREMA. Sea $f : X \to Y$ una función continua entre espacios topológicos y $x_0 \in X$. Son equivalentes:

(a) f es continua en x_0.

(b) $\mathcal{F} \to x_0 \Rightarrow f(\mathcal{F}) \to f(x_0)$.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Sea $\mathcal{F}$ cualquier filtro en X que converja a x_0; entonces $\mathcal{N}_{x_0} \subseteq \mathcal{F}$. Sea $V \in \mathcal{N}_{f(x_0)}$; por (a), existe $U \in \mathcal{N}_{x_0}$ tal que $f(U) \subseteq V$, y como $U \in \mathcal{F}$, entonces

$$f(U) \in \{f(F) : F \in \mathcal{F}\} \subseteq f(\mathcal{F});$$

$$\therefore V \in f(\mathcal{F}); \ \therefore \mathcal{N}_{f(x_0)} \subseteq f(\mathcal{F}); \ \therefore f(\mathcal{F}) \to f(x_0).$$

$(b) \Rightarrow (a)$ Sea $V \in \mathcal{N}_{f(x_0)}$; como $\mathcal{N}_{x_0} \subseteq \mathcal{N}_{x_0}$, tenemos que $\mathcal{N}_{x_0} \to x_0$. Por (b),

$$f(\mathcal{N}_{x_0}) \to f(x_0); \therefore V \in f(\mathcal{N}_{x_0})$$

y como todo elemento del filtro contiene algún elemento de la base

$$\exists\, U \in \mathcal{N}_{x_0} \cdot\!\ni\!. f(U) \subseteq V$$

lo que significa que f es continua en x_0.@

<u>*Ejercicio:*</u> 7. Sean X y Y dos conjuntos y $f : X \to Y$ cualquier función.

a) Si $\mathcal{F}$ es un filtro en X, probar que

$$f(\mathcal{F}) = \left\{G \in Y : f^{-1}(G) \in \mathcal{F}\right\}$$

b) Si además X y Y están topologizados y $f(\mathcal{F}) \to f(x)$, p.a. $x \in X$, probar que

$$f^{-1}(V) \in \mathcal{F}, \forall V \in \mathcal{N}_{f(x)}$$

TEOREMA. Sea $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ cualquier familia de espacios topológicos no vacíos. Si $\mathcal{F}$ es un filtro en $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} (X_\lambda, \tau_\lambda)$ y $(\Lambda, f) \in \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} (X_\lambda, \tau_\lambda)$, son equivalentes:

a) $\mathcal{F} \to (\Lambda, f)$

b) $P_\lambda(\mathcal{F}) \to f(\lambda), \forall \lambda \in \Lambda$.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Como toda λ-proyección es una función continua podemos aplicar el teorema anterior y de (a) concluir que

$$P_\lambda(\mathcal{F}) \to P_\lambda(\Lambda, f) = f(\lambda)$$

$(b) \Rightarrow (a)$ Sea

$$P_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap P_{\lambda_2}^{-1}(U_{\lambda_2}) \cap \cdots \cap\ P_{\lambda_n}^{-1}(U_{\lambda_n}) \in \mathcal{N}_{(\Lambda, f)}$$

Por (b) y el ejercicio 7(b), $P_{\lambda_i}^{-1}(U_{\lambda_i}) \in \mathcal{F}$, $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$; por lo tanto

$$P_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap P_{\lambda_2}^{-1}(U_{\lambda_2}) \cap \cdots \cap\ P_{\lambda_n}^{-1}(U_{\lambda_n}) \in \mathcal{F}$$

lo que significa que toda vecindad básica de (Λ, f) es miembro de $\mathcal{F}$ y esto es suficiente para poder asegurar que $\mathcal{F} \to (\Lambda, f)$.@

TEOREMA. Sea $f : X \to Y$ una función arbitraria. Si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro en X, entonces $f(\mathcal{F})$ es un ultrafiltro en Y.

Demostración. Sea $B \subseteq Y$; entonces $f^{-1}(B)$ y $f^{-1}(Y-B)$ son subconjuntos mutuamente complementarios de X, donde $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro. Luego

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{F} \quad \text{ó} \quad f^{-1}(Y-B) \in \mathcal{F}$$

Por (a) del ejercicio 7,

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{F} \Rightarrow B \in f(\mathcal{F})$$
$$f^{-1}(Y-B) \in \mathcal{F} \Rightarrow (Y-B) \in f(\mathcal{F})$$

Por lo tanto $f(\mathcal{F})$ es un ultrafiltro en Y.@

Julio 29 de 1987.

En la prueba del siguiente teorema haremos uso de un resultado algebraico, equivalente al axioma de elección, conocido como *lema de Zorn.*

TEOREMA. Todo filtro está contenido en un ultrafiltro.

Demostración. Sean, $\mathcal{F}$ cualquier filtro en X, $\mathcal{M}$ la colección de filtros en X que contienen a $\mathcal{F}$ y $\leq$ un orden en $\mathcal{M}$ definido como sigue:

$$\mathcal{F}_1 \leq \mathcal{F}_2 \Leftrightarrow \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$$

Es claro que $\leq$ es una relación reflexiva, transitiva y antisimétrica. Sea $\mathcal{C}$ cualquier cadena en $\mathcal{M}$[14] y sea $\mathcal{F}' = \cup\mathcal{C}$; entonces $\mathcal{F}' \in \mathcal{M}$, puesto que, obviamente, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$. Veamos que $\mathcal{F}'$ es un filtro.

(i)Sean $F_1, F_2 \in \mathcal{F}'$; entonces existen $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \mathcal{C}$ tales que $F_1 \in \mathcal{F}_1, F_2 \in \mathcal{F}_2$. Pero al ser $\mathcal{C}$ una cadena tenemos que $\mathcal{F}_1 \leq \mathcal{F}_2$ ó $\mathcal{F}_2 \leq \mathcal{F}_1$; por lo tanto,

$$F_1, F_2 \in \mathcal{F}_1 \text{ ó } F_1, F_2 \in \mathcal{F}_2; \ \therefore F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}'$$

(ii) Sean $F_1, F_2 \subseteq X$ y supongamos que $F_1 \in \mathcal{F}'$ y que $F_1 \subseteq F_2$; entonces existe $\mathcal{F}_1 \in \mathcal{C}$ tal que $F_1 \in \mathcal{F}_1$; entonces $F_2 \in \mathcal{F}_1$; por lo tanto, $F_2 \in \mathcal{F}'$.

En consecuencia, $\mathcal{F}' \in \mathcal{M}$; y como

$$\mathcal{F}_1 \leq \mathcal{F}', \forall \mathcal{F}_1 \in \mathcal{C}$$

entonces $\mathcal{F}'$ es cota superior de $\mathcal{C}$. Por el lema de Zorn, existe un elemento máximo $\mathcal{G} \in \mathcal{M}$, es decir, $\mathcal{G}$ es tal que si $\mathcal{G} \leq \mathcal{F}_1$ entonces $\mathcal{G} = \mathcal{F}_1$; en otras palabras, no hay en X un filtro más fino que $\mathcal{F}$ que sea estrictamente más fino que $\mathcal{G}$. Por lo tanto, $\mathcal{G}$ es ultrafiltro.@

Ejercicio: 8. $a)$ Sea D un conjunto dirigido arbitrario; probar que

$$\{R_d : d \in D\}$$

es una base de filtro en D.

$b)$ Sea $\mathcal{F}$ un filtro arbitrario en X; si

$$D = \{(x, F) : x \in F \in \mathcal{F}\}$$

y

$$(x, F) \leq (x', F') \Leftrightarrow F' \subseteq F$$

probar que D es un conjunto dirigido.

Definiciones. (a) Sea $\varphi : D \to X$ una red arbitraria; llamaremos **filtro generado por la red** φ al filtro $\mathcal{F}_\varphi$ que tiene por base a

$$\{\varphi(R_d) : d \in D\}$$

(b) Sea $\mathcal{F}$ cualquier filtro en X y sea

$$D = \{(x, F) : x \in F \in \mathcal{F}\}$$

con el orden que le definimos en el ejercicio anterior. Llamaremos **red basada en** $\mathcal{F}$ a la red

$$\begin{array}{ccc} D & \overset{\varphi_{\mathcal{F}}}{\to} & X \\ (x, F) & \mapsto & x \end{array}$$

[14] i.e. $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}$ y $\forall \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \mathcal{C}$, $\mathcal{F}_1 \leq \mathcal{F}_2$ ó $\mathcal{F}_2 \leq \mathcal{F}_1$

Julio 31 de 1987.

Teorema. Sea (X, τ) cualquier espacio topológico no vacío y $x \in X$; entonces:
(a) $\varphi \to x \Leftrightarrow \mathcal{F}_\varphi \to x$
(b) $\mathcal{F} \to x \Leftrightarrow \varphi_{\mathcal{F}} \to x$

Demostración. (a) $(\Rightarrow)$ Por hipótesis, $\varphi^{-1}(U)$ es residual en D, $\forall U \in \mathcal{N}_x$; por lo tanto, existe $d \in D$ tal que $R_d \subseteq \varphi^{-1}(U)$; $\therefore \varphi(R_d) \subseteq U$. Pero $\varphi(R_d)$ es un elemento de la base del filtro que genera a $\mathcal{F}_\varphi$; por consiguiente $U \in \mathcal{F}_\varphi$. Por lo tanto, $\mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{F}_\varphi$; $\therefore \mathcal{F}_\varphi \to x$.

$(\Leftarrow)$ Sea $U \in \mathcal{N}_x$; entonces $U \in \mathcal{F}_\varphi$, y como todo elemento de un filtro contiene un miembro de la base que lo genera, entonces existe $d \in D$ tal que $\varphi(R_d) \in U$; luego, $R_d \subseteq \varphi^{-1}(U)$; $\therefore \varphi^{-1}(U)$ es residual en D; $\therefore \varphi \to x$.

(b) $(\Rightarrow)$ Sea $U \in \mathcal{N}_x$; entonces $U \in \mathcal{F}$ y

$$(x, U) \in D = \{(x, F) : x \in F \in \mathcal{F}\}$$

Consideremos el residual $R_{(x.U)}$ en D y sea $(y, F) \in R_{(x,U)}$; entonces $(x, U) \leq (y, F)$, i.e. $F \subseteq U$. Luego, $\varphi_{\mathcal{F}}(y, F) = y \in U$; $\therefore R_{(x,U)} \subseteq \varphi_{\mathcal{F}}^{-1}(U)$; $\therefore \varphi_{\mathcal{F}}^{-1}(U)$ es residual en D; $\therefore \varphi_{\mathcal{F}} \to x$.

$(\Leftarrow)$ Sea $U \in \mathcal{N}_x$; entonces $\varphi_{\mathcal{F}}^{-1}(U)$ es residual en D; por lo tanto, existe $(y, F) \in D$ tal que

$$R_{(y,F)} \subseteq \varphi_{\mathcal{F}}^{-1}(U)$$

Sea $z \in F$; entonces $(y, F) \leq (z, F)$ (para $\leq$ los primeros miembros no importan); $\therefore (z, F) \in R_{(x,F)}$;

$$\therefore \varphi_{\mathcal{F}}(z, F) = z \in U;$$

$\therefore F \subseteq U$; $\therefore U \in \mathcal{F}$; $\therefore \mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{F}$; $\therefore \mathcal{F} \to x$.@

Ejercicio: 9. Sean, (X, τ) un espacio topológico no vacío, φ una red en X, $\mathcal{F}$ un filtro en X y $x \in X$. Probar que
$a)$ x es punto de aglomeración de φ si, y sólo si, x es punto de aglomeración de $\mathcal{F}_\varphi$
$b)$ x es punto de aglomeración de $\mathcal{F}$ si, y sólo si, x es punto de aglomeración de $\varphi_{\mathcal{F}}$

Teorema. Sea X un espacio topológico no vacío arbitrario. Son equivalentes:
(a) X es compacto.
(b) Toda red tiene un punto de aglomeración.
(c) Toda ultrarred converge.
(d) Todo ultrafiltro converge.
(e) Todo filtro tiene un punto de aglomeración.

En la demostración de este teorema haremos uso de alguno de los incisos del siguiente

Ejercicio 10. Sea X un espacio topológico no vacío. Probar que
a) si φ es una red arbitraria en X, entonces

$$\varphi \text{ es ultrarred } \Leftrightarrow \mathcal{F}_\varphi \text{ es ultrafiltro}$$

b) si $\mathcal{F}$ es un filtro en X, entonces

$$\mathcal{F} \text{ es ultrafiltro } \Leftrightarrow \varphi_{\mathcal{F}} \text{ es ultrarred}$$

Demostración. Se sabe que (a) y (b) son equivalentes y que (b) implica (c)[15].

$(c) \Rightarrow (d)$ Sea $\mathcal{F}$ cualquier ultrafiltro en X. Por (b) del ejercicio, $\varphi_{\mathcal{F}}$ es ultrarred; por (c), $\varphi_{\mathcal{F}}$ converge. Por el teorema anterior, $\mathcal{F}$ converge.

$(d) \Rightarrow (e)$ Sea $\mathcal{F}$ un filtro arbitrario en X; se sabe que todo filtro está contenido en un ultrafiltro. Por lo tanto, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ que es ultrafiltro en X; por (d), $\mathcal{G} \to x$ p.a. $x \in X$. También se sabe que x es punto de aglomeración de $\mathcal{F}$ si, y sólo si, existe un filtro más fino que $\mathcal{F}$ que converge a x. Luego, x es punto de aglomeración de $\mathcal{F}$.

[15] Julio 3 de 1987.

$(e) \Rightarrow (b)$ Sea φ una red arbitraria; por (e), $\mathcal{F}_\varphi$ tiene al menos un punto de aglomeración $x \in X$; por (a) del ejercicio 9, x es punto de aglomeración de φ.@

<u>Teorema de Tychonoff</u> Sea $(X_\lambda)_\Lambda$ una familia de espacios topológicos no vacíos. Si $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, entonces X es compacto $\Leftrightarrow$ X_λ es compacto,$\forall\lambda \in \Lambda$.

Prueba. $(\Rightarrow)$ $P_\lambda : X \to X_\lambda$ es continua y suprayectiva; $\therefore X_\lambda$ es compacto.

$(\Leftarrow)$ Sea $\mathcal{F}$ cualquier ultrafiltro en X; entonces $P_\lambda(\mathcal{F})$ es un ultrafiltro en X_λ que es compacto por hipótesis. Por (d) del teorema, $P_\lambda(\mathcal{F})$converge, digamos a $x_\lambda \in X_\lambda$, $\forall\lambda \in \Lambda$. Sea $(\Lambda, f) \in X$ tal que $f(\lambda) = x_\lambda$. Entonces $\mathcal{F} \to (\Lambda, f)$ y, por (d) del teorema, X es compacto. @

Este teorema es uno de los más importantes de este curso. La demostración original que de él dio Tychonoff abarca más de 80 cuartillas. Con la teoría de convergencia que hemos desarrollado, la demostración no excede los cinco renglones. Se habrá observado que el lema de Zorn ha servido de apoyo para probar el teorema de Tychonoff; puede decirse, por tanto, que el lema de Zorn *implica* el teorema de Tychonoff. Se puede probar que, a su vez, el teorema de Tychonoff implica el lema de Zorn y por tanto, que son equivalentes. De aquí que algunas veces se diga que el teorema de Tychonoff es equivalente al axioma de elección.

Continuaremos la vez próxima.

Lunes 3 de agosto de 1987.

Definición. Un espacio topológico X es **regular** si para todo subconjunto cerrado A de X y todo punto $x \in X - A$ existen vecindades abiertas y ajenas de x y de A, respectivamente.

<u>*Ejemoplos:*</u> 1. Todo espacio indiscreto es regular.

2. Todo espacio discreto es regular.

3. Si (X, τ) es regular y T_1 entonces es T_2. En efecto, sean $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$. Como X es T_1, $\{x_2\}$ es cerrado en X, que también es regular;

$$\therefore \exists\, U, V \in \tau.\ni.x_1 \in U, x_2 \in V \text{ y } U \cap V = \varnothing$$

Por lo tanto, Xes T_2.

Definición. Un espacio es $\mathbf{T_3}$ si es regular y T_1.

<u>*Ejemplo de un espacio T_2 que no es T_3:*</u> Sea $(\mathbb{R}, \tau)$ la recta real con la topología usual. Consideremos el conjunto

$$B = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

Sea τ' la extensión simple de τ correspondiente a B, i.e.

$$\tau' = \{U \cup (V \cap B) : U, V \in \tau\}$$

$B \in \tau'$; por lo tanto, $\mathbb{R} - B = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ es cerrado en $(\mathbb{R}, \tau')$, lo que no ocurre en $(\mathbb{R}, \tau)$. Luego, $\tau \subset \tau'$; $\therefore$ $(\mathbb{R}, \tau') \in T_2$[16]. Para mostrar que $(\mathbb{R}, \tau')$ no es T_3 veremos que 0 y el cerrado $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ no pueden separarse conforme a la regularidad. Sabemos que para todo abierto usual U de $\mathbb{R}$ que contenga 0 se tiene

$$U \cap \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \neq \varnothing$$

Por consiguiente, para que $\{0\}$ y $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ pudieran separarse en $(\mathbb{R}, \tau')$, la vecindad abierta del cero tiene que ser de las nuevas vecindades introducidas por τ', es decir, de la forma $V \cap B$. Supongamos pues que

$$0 \in V \cap B,\ p.a.\ V \in \tau$$

Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} \in V$. Sea

$$W = U_1 \cup (V_1 \cap B) \in \tau'.\ni.\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq W$$

---

[16](Nota del autor): *En general, si X es T_2 y aumenta su topología a otra más fina, el espacio obtenido también es T_2.*

Entonces $\frac{1}{n_0} \in U_1$ (porque $\frac{1}{n_0} \in W$ y $\frac{1}{n_0} \notin (V_1 \cap B)$; [$\frac{1}{n_0}$ no puede ser elemento de $(V_1 \cap B)$ porque no pertenece a B].); luego,

$$\frac{1}{n_0} \in U_1 \cap V \subseteq W$$

Sea (a, b) un segmento de recta no vacío tal que

$$(a, b) - \left\{ \frac{1}{n_0} \right\} \subseteq U_1 \cap V \cap B;$$

Entonces $(V \cap B) \cap W \neq \varnothing$, y no hay otro caso, pues una vecindad W del tipo $V_1 \cap B$ no puede contener a $\mathbb{R} - B$. Por lo tanto, $(\mathbb{R}, \tau')$ es T_2 pero no es T_3.@

Agosto 7 de 1987.

Teorema. Sea X un espacio topológico arbitrario. Son equivalentes:
a) X es regular.
b) $\forall x \in X, \forall U \in \mathcal{N}_x \exists\ V \in \mathcal{N}_x \ni . \overline{V} \subseteq U$.
c) Cada punto de X posee una base local de vecindades cerradas.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Sean, $x \in X$ y $U \in \mathcal{N}_x$, arbitrarios; entonces $x \in \overset{\circ}{U}$. Sea $A = X - \overset{\circ}{U}$; entonces A es cerrado en X y $x \notin A$. Por (a) existen vecindades abiertas y ajenas V y W de x y de A, respectivamente. Al ser ajenas,

$$V \subseteq X - W \subseteq X - A = \overset{\circ}{U};$$

como además W es abierto,

$$\overline{V} \subseteq X - W; \ \therefore \overline{V} \subseteq \overset{\circ}{U} \subseteq U$$

(b) $\Rightarrow$ (c) Sea x cualquier punto de X y U cualquier vecindad de x. Por (b), existe $V \in \mathcal{N}_x$ tal que $\overline{V} \subseteq U$. Como esto ocurre con cada vecindad de x, puede afirmarse que x posee una base local de vecindades cerradas.

(c) $\Rightarrow$ (a) Sean, A un cerrado en X y $x \in X - A$. Entonces $X - A \in \mathcal{N}_x$; por (c), existe $W \in \mathcal{N}_x$ cerrada, $W \subseteq X - A$. Sea $U = \overset{\circ}{W}$ y $V = X - W$; entonces $U \in \mathcal{N}_x^{\circ}$, $V \in \mathcal{N}_A^{\circ}$ y $U \cap V = \varnothing$. Por lo tanto, X es regular.@

Definiciones. Un espacio topológico X es **completamente regular** si para todo subconjunto cerrado A de X y todo punto $x \in X - A$ existe una función continua $f : X \to [0, 1] = I$ tal que

$$f(x) = 0 \quad \text{y} \quad f(A) \subseteq \{1\}$$

(Cuando $A \neq \varnothing$ ocurre la igualdad $f(A) = \{1\}$). Cuando X es completamente regular y es T_1 se dice que X es un **espacio de Tychonoff**.

Ejemplos: 1. Todo espacio indiscreto es completamente regular. En efecto, si $x \in X$ y $A \subseteq X - \{x\}$ es cerrado, entonces $A = \varnothing$. Sea $f : X \to I$ la constante de valor cero; entonces f es continua, $f(x) = 0$ y $f(A) \subset \{1\}$ porque $f(A) = \varnothing$. Por lo tanto, X es completamente regular.

2. Todo espacio completamente regular es regular.

Efectivamente, si X es completamente regular, A cerrado en X y $x \in X - A$, entonces existe $f : X \to I$ tal que $f(x) = 0$ y $f(A) \subseteq \{1\}$. Sean

$$U_0 \in \mathcal{N}_0^{\circ} \quad \text{y} U_1 \in \mathcal{N}_1^{\circ}$$

Por la continuidad de f, $f^{-1}(U_0)$ y $f^{-1}(U_1)$ son abiertos que contienen a x y a A, respectivamente; y son ajenos si U_0 y U_1 se escogen ajenos. Por lo tanto, X es regular.@

Agosto 10 de 1987.

Teorema. Todo espacio de Tychonoff puede sumergirse en un espacio compacto de Hausdorff.

Demostración. Sea X un espacio de Tychonoff arbitrario. Consideremos la fuente de funciones continuas

$$\mathcal{F} = (f_c : X \to I)_{\mathtt{C}}$$

Para ver que se trata de una fuente inicial recordemos que, con relación a una fuente $\mathcal{F}$, la topología inicial para X es la más pequeña de las topologías que dan continuidad a todos los miembros de $\mathcal{F}$ [17]. Como aquí cada f_c es una función continua, la topología de X debe contener a la inicial. Pero también recíprocamente; veamos por qué: Sea U cualquier abierto en X y sea x cualquier punto en U; entonces $x \notin X - U$, que es cerrado en X. Por ser X de Tychonoff existe $c \in \mathsf{C}$ tal que

$$f_c(x) = 0 \quad \text{y} \quad f_c(X - U) \subseteq \{1\}$$

Sea $0 < \varepsilon < 1$; entonces $[0, \varepsilon)$ es abierto en I, y tenemos

$$x \in U \cap f_c^{-1}[0, \varepsilon)$$

que, debido a la continuidad de f_c, es abierto en X. Como este razonamiento vale sea cual sea el punto x escogido en U y como U también es arbitrario, entonces podemos asegurar que todo abierto en X es unión de abiertos subbásicos de la topología inicial. Por lo tanto, la topología de X está contenida en la topología inicial.

Consideremos, por otro lado, el espacio $I^{\#\mathsf{C}} = \prod_{c \in \mathsf{C}} I$ con la topología de Tychonoff; por la propiedad universal del producto topológico que posee la familia de proyecciones $\left(P_c : I^{\#\mathsf{C}} \to I\right)_{\mathsf{C}}$ existe una única función continua $i : X \to I^{\#\mathsf{C}}$ tal que para toda $c \in \mathsf{C}$

$$\begin{tikzcd} & I & \\ X \arrow[ur, "f_c"] \arrow[rr, "i"'] & \circlearrowleft & I^{\#\mathsf{C}} \arrow[ul, "P_c"'] \end{tikzcd}$$

Por otra parte, al ser X de Tychonoff, es regular y T_1, es decir, es T_3; por lo tanto, es T_2. De aquí y de la inicialidad de $\mathcal{F}$ podemos inferir que $\mathcal{F}$ es monofuente. En efecto, sean $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, y supongamos que

$$f_c(x_1) = f_c(x_2), \forall c \in \mathsf{C}$$

Debido a la inicialidad de $\mathcal{F}$,

$$\gamma = \left\{ f_c^{-1}(U_c) : U_c \text{ es abierto en } I \right\}$$

es subbase de la topología de X. En consecuencia, existen intrsecciones finitas de elementos de γ [18] tales que

$$x_1 \in \bigcap_{j=1}^{n} f_{c_j}^{-1}\left(U_{c_j}\right) \quad \text{y} \quad x_2 \in \bigcap_{j=1}^{\tilde{n}} f_{c_j}^{-1}\left(V_{c_j}\right)$$

Además

$$\left[\bigcap_{j=1}^{n} f_{c_j}^{-1}\left(U_{c_j}\right)\right] \cap \left[\bigcap_{j=1}^{\tilde{n}} f_{c_j}^{-1}\left(V_{c_j}\right)\right] \neq \varnothing$$

porque

$$f_{c_j}(x_1) \in U_{c_j}, \forall j \in \{1, 2, ..., n\}$$

pero $f_{c_j}(x_1) = f_{c_j}(x_2)$ y por lo tanto

$$x_2 \in \bigcap_{j=1}^{n} f_{c_j}^{-1}\left(U_{c_j}\right).$$

Como este razonamiento es válido cualesquiera que sean los abiertos básicos que contengan a x_1 y a x_2, tiene lugar una contradicción con el hecho de que X sea de Hausdorff. Luego, falso suponer

$$f_c(x_1) = f_c(x_2), \forall c \in \mathsf{C}$$

Por lo tanto, $\mathcal{F}$ es monofuente.

---

[17] Véase el inciso (d) del teorema de la clase del 13 de diciembre de 1985.

[18] abiertos básicos de X

Finalmente, es fácil ver que la inicialidad e inyectividad de F hacen que la inicialidad e inyectividad de i sean obligadas, lo cual significa que i es una *inmersión* de X en el cubo[19] $I^{\#\mathsf{C}}$ que es compacto (por el teorema de Tychonoff) y de Hausdorff (pues ser T_2 es una propiedad productiva).@

Observación: Porque X es de Hausdorff es que se puede afirmar que *la inicialidad de i implica su inyectividad.* Aquí es donde aparece la totalidad de la hipótesis.

El recíproco también es válido, a saber: Todo subespacio de un compacto de Hausdorff es de Tychonoff.[20]

Para demostrarlo nos valdremos de otros resultados que iremos introduciendo a continuación. Uno de ellos, muy importante, se debe a un matemático soviético de apellido Urysohn. Involucra el concepto de normalidad al que ya aludimos en otra ocasión y que precisaremos ahora.

Definición. Un espacio topológico X es **normal** si para cualquier par de subconjuntos cerrados y ajenos de X existen sendas vecindades abiertas y ajenas.

El resultado, cuya demostración dejaremos para otro día, es el siguiente.

Lema de Urysohn. Si X es normal, entonces para cada par de cerrados ajenos A y B de X existe una función continua $f : X \to I$ tal que $f(A) \subseteq \{0\}$ y $f(B) \subseteq \{1\}$. [@][23]

Agosto 12 de 1987.

Ya tenemos una prueba del siguiente resultado[25]*; conviene tener presente su enunciado formal por la importancia que tendrá en lo que sigue.*

Teorema. Todo espacio compacto de Hausdorff es normal.@

Un resultado similar tiene lugar para espacios métricos (aunque no sean compactos).

Teorema. Todo espacio métrico es normal.

Demostración. Sea (M, d) cualquier espacio métrico y sean A y B dos cerrados ajenos de M. Sin perder generalidad podemos suponer que ninguno es vacío. Entonces, para toda $a \in A$, $d(a, B) > 0$ porque $a \notin \overline{B} = B$; análogamente, $d(b, A) > 0, \forall b \in B$. Definimos:

$$\forall a \in A, r_a = \frac{1}{2} d(a, B) \quad \text{y} \quad \forall b \in B, r_b = \frac{1}{2} d(b, A)$$

Consideremos

$$\{D_{r_a}(a) : a \in A\} \quad \text{y} \quad \{D_{r_b}(b) : b \in B\}$$

y sean

$$U = \bigcup_{a \in A} D_{r_a}(a) \quad \text{y} \quad V = \bigcup_{b \in B} D_{r_b}(b)$$

Entonces

$$U \in \mathcal{N}_A^{\circ} \quad \text{y} \quad V \in \mathcal{N}_B^{\circ}$$

y si hubiese un $z \in U \cap V$, entonces existirian $a \in A$ y $b \in B$ tales que

$$z \in D_{r_a}(a) \cap D_{r_b}(b)$$

y tendríamos

$$d(a, b) \leq d(a, z) + d(z, b) < r_a + r_b = \frac{1}{2} [d(a, B) + d(b, A)] \leq \max\{d(a, B), d(b, A)\}$$

lo que es falso. Por lo tanto, $U \cap V = \varnothing$; por lo tanto, (M, d) es normal.@

Otros ejemplos de espacios normales son los espacios indiscretos, pues si X es indiscreto y A y B son cerrados y ajenos en X, entonces uno es vacío; por lo tanto, X y $\varnothing$ son vecindades abiertas y ajenas que los separan. Esto muestra que hay espacios normales que ni siquiera son T_0.

Definición. Un espacio topológico es $\mathbf{T_4}$ si es normal y T_1.

---

[19] Cubo de Hilbert.

[20] O sea que los espacios de Tychonoff son *precisamente* subespacios de espacios compactos de Hausdorff.

[25] Véase el corolario del viernes 29 de mayo. (En la clase de *este* 12 de agosto, el Doctor dio una demostración que aquí omito por ser exactamente análoga a la del teorema del cual se extrajo el corolario.)

Claramente todo espacio T_4 es T_2, pues al ser T_1 cada par de puntos distintos son cerrados ajenos y, por la normalidad, existen vecindades abiertas y ajenas que los separan.

También es cierto que todo espacio T_4 es de Tychonoff porque si X es T_4 es T_1, y si A es cerrado en X y $x \in X - A$, entonces A y $\{x\}$ son dos cerrados ajenos en un espacio normal; por el lema de Urisohn existe una función continua $f : X \to I$ tal que $f(x) = 0$ y $f(A) \subseteq \{1\}$. O sea que X es completamente regular y, por lo tanto, es de Tychonoff.

Se ha probado también que todo espacio completamente regular es regular y, en consecuencia, que todo espacio de Tychonoff es T_3. Se pueden mostrar ejemplos de espacios T_3 que no son de Tychonoff, así como espacios de Tychonoff que no son T_4. En otras palabras, los espacios de Tychonoff son intermedios entre los T_3 y los T_4. Cuando Tychonoff hizo notar la importancia de estos espacios que ahora llevan su nombre ya se había convenido en llamar T_4 a los espacios T_1 normales, y ocuparon éstos *el lugar* que según la contención corresponde a aquéllos; no habiendo otro entero entre 3 y 4, se convino en llamar $T_{3.5}$ a los espacios de Tychonoff. Al ser así, tenemos

$$T_4 \subset T_{3.5} \subset T_3 \subset T_2 \subset T_1 \subset T_0$$

Agosto 14 de 1987.

Séptima tanda de ejercicios: 1. Probar que ser $T_{3.5}$ es una propiedad hereditaria.

2. Probar que ser normal es una propiedad débilmente hereditaria.

Ya estamos en condiciones de probar el recíproco del teorema visto en la clase del día 10.

TEOREMA. Todo subespacio de un compacto de Hausdorff es de Tychonoff.

Demostración. Ya sabemos que todo espacio compacto y de Hausdorff es normal; luego, es T_4 (pues siendo de Hausdorff es T_1) y, por tanto, $T_{3.5}$, lo cual, según el ejercicio 1, es una propiedad hereditaria. En consecuencia, cualquier subespacio de un compacto de Hausdorff es $T_{3.5}$, que es lo que se quería demostrar.@

10.3 Compacidad Local

Definición. Un espacio topológico es **localmente compacto** si cada uno de sus puntos posee una base local de vecindades compactas.

Ejemplos: 1. Todo espacio indiscreto es localmente compacto pues si X es indiscreto es compacto y es la única vecindad de cada uno de sus puntos.

2. Todo espacio discreto es localmente compacto porque para cada $x \in X$, $\{x\}$ es una vecindad compacta de x y, obviamente, $\{x\} \subseteq U$, para cualquier $U \in \mathcal{N}_x$.

El siguiente ejemplo, de gran interés en análisis, es el que dio origen al concepto de compacidad local.

3. Todo espacio euclidiano es localmente compacto. En efecto, se sabe[26] que para todo $x \in X$,

$$\left\{\overline{D_{\frac{1}{k}}(x)} : k \in \mathbb{N}\right\}$$

es una base local en x, y cada uno de sus miembros es compacto porque es cerrado y acotado.

4. Todo espacio compacto y de Hausdorff es localmente compacto.

En efecto, sabemos que todo compacto de Hausdorff es T_4; por consiguiente es T_3 y, particularmente, regular, lo cual significa que cada punto posee una base local de vecindades cerradas; siendo cerradas en un compacto, estas vecindades son compactas y debido a ello el espacio resulta localmente compacto.@

TEOREMA. Un espacio de Hausdorff es localmente compacto si, y sólo si, todo punto posee una vecindad compacta.

Agosto 19 de 1987.

Demostración. ($\Rightarrow$) Inmediato.

($\Leftarrow$) Sea $x \in X$ y sea U la vecindad compacta que por hipótesis posee. Entonces, como subespacio, U es compacto y de Hausdorff; por el ejemplo anterior, U es localmente compacto. Por consiguiente, x posee una base local $\mathcal{B}_{x,U}$ de vecindades compactas relativas a U. Sea $V \in \mathcal{B}_{x,U}$; entonces existe un abierto absoluto

[26] Ejercicio 8 de la primera tanda.

W tal que $x \in U \cap W \subseteq V$; $\therefore W \in \mathcal{N}_x$, y como $U \in \mathcal{N}_x$, entonces $U \cap W \in \mathcal{N}_x$; $\therefore V \in \mathcal{N}_x$, o sea que todo miembro de $\mathcal{B}_{x,U}$ es una vecindad absoluta de x. Por lo tanto, $\mathcal{B}_{x,U}$ es una base local absoluta de vecindades compactas de x, y como x es cualquier punto, resulta que X es localmente compacto.@

Más ejemplos: 5. $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ no son localmente compactos.

Sea $r \in \mathbb{Q}$. Cualquier vecindad de r en $\mathbb{Q}$ es de la forma $U \cap \mathbb{Q}$, donde U es una vecindad de r en $\mathbb{R}$; entonces existen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < r < b$, tales que $[a,b] \subset U$. Si $U \cap \mathbb{Q}$ fuese compacto, también $[a,b] \cap \mathbb{Q}$ sería compacto y, en particular, cerrado en $\mathbb{R}$, lo que es falso. Por lo tanto, ninguna vecindad de elementos de $\mathbb{Q}$ puede ser compacta; pero además $\mathbb{Q}$ es T_2. Entonces, del teorema anterior se sigue que $\mathbb{Q}$ no es localmente compacto. En forma similar se prueba que $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ tampoco es localmente compacto.@

Definición. Sea X un espacio de Hausdorff no vacío. Se dice que X es una **variedad topológica de dimensión n** si para cada $x \in X$ existen, una vecindad abierta U de x y un homeomorfismo

$$\phi : U \to D_r(y) \subset \mathbb{R}^n, \text{ con } r > 0$$

tal que $\phi(x) = y$.

6. Toda variedad topológica es un espacio localmente compacto.

Sean, X es una variedad topológica, $x \in X$, $U \in \mathcal{N}_x^\circ$, $\phi : U \to D_r(y)$ el homeomorfismo tal que $\phi(x) = y$ y consideremos el homeomorfismo inverso ϕ^{-1}. Entonces

$$D_{\frac{r}{2}}(y) \subset \phi(U) \quad \text{ y } \quad D_{\frac{r}{2}}(y) \subset \overline{D_{\frac{r}{2}}(y)}$$

Por lo tanto

$$\phi^{-1}\left[D_{\frac{r}{2}}(y)\right] \subset U \quad \text{ y } \quad \phi^{-1}\left[D_{\frac{r}{2}}(y)\right] \subset \phi^{-1}\left[\overline{D_{\frac{r}{2}}(y)}\right]$$

Como $\overline{D_{\frac{r}{2}}(y)}$ es compacto y ϕ^{-1} es continua (y abierta), entonces $\phi^{-1}\left[\overline{D_{\frac{r}{2}}(y)}\right]$ es un compacto en X que contiene al abierto $\phi^{-1}\left[D_{\frac{r}{2}}(y)\right]$ (abierto en U, que es abierto absoluto) que contiene a x, es decir, $\phi^{-1}\left[\overline{D_{\frac{r}{2}}(y)}\right]$ es una vecindad compacta de x. Por lo tanto, en una variedad topológica todo punto posee una vecindad compacta; como además la variedad es, por definición, un espacio de Hausdorff, entonces del teorema anterior se concluye que toda variedad es un espacio localmente compacto.@

Ejercicios: 3. Sea X un espacio de Hausdorff; si A y B son dos subespacios localmente compactos y $A \cap B \neq \varnothing$, probar que $A \cap B$ es localmente compacto.

4. Sea X cualquier espacio T_2 localmente compacto; probar que:

(a) Todo subconjunto abierto no vacío de X es localmente compacto.

(b) Todo subconjunto cerrado no vacío de X es localmente compacto.

(c) La intersección de un abierto con un cerrado es localmente compacta si no es vacía.

Agosto 24 de 1987.

Ejercicio 5. Sea X un conjunto no vacío arbitrario. Para cualquier $A \subseteq X$, sea τ_A la topología para X formada por $\varnothing$ y por todo subconjunto de X que contiene a A. ¿Es (X, τ_A) localmente compacto? Justifique su respuesta.

Proposición. Sea $f : X \to Y$ cualquier función continua, suprayectiva y abierta. Si X es localmente compacto, entonces Y también lo es.

Demostración. Sea $y \in Y$; entonces existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Sea $V \in \mathcal{N}_y$, entonces $f^{-1}(V) \in \mathcal{N}_x$; como X es localmente compacto, existe una vecindad compacta de x, digamos W, tal que $W \subseteq f^{-1}(V)$; por ser vecindad, existe un abierto U de X tal que $x \in U \subseteq W$. Pero f es abierta; luego $f(U)$ es un abierto en Y tal que

$$y \in f(U) \subseteq f(W)$$

Por lo tanto, $f(W)$ es una vecindad de y; compacta (porque f es continua) y contenida en V. Esto prueba que Y es localmente compacto.@

Teorema. Sea $(X_\lambda)_\Lambda$ cualquier familia no vacía de espacios topológicos; son equivalentes:

(a) $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ es localmente compacto.

(b) Cada X_λ es localmente compacto y todos los miembros de $(X_\lambda)_\Lambda$, salvo un número finito, son compactos.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Cada λ-proyección $P_\lambda : X \to X_\lambda$ es una función continua, suprayectiva y abierta; luego, por (a) y por la proposición anterior, cada X_λ es localmente compacto.

Por otra parte, sea $(\Lambda, f) = x \in X$; por (a), x posee una vecindad U que es compacta. Por lo tanto existe una vecindad básica de x contenida en U; como sabemos, las vecindades básicas en la topología de Tychonoff tienen la forma

$$P_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap \cdots \cap P_{\lambda_n}^{-1}(U_{\lambda_n}), \text{ con } U_{\lambda_i} \in \mathcal{N}^\circ_{f(\lambda_i)}$$

y como

$$P_{\lambda_i}^{-1}(U_{\lambda_i}) = U_{\lambda_i} \times \prod_{\lambda \neq \lambda_i} X_\lambda, \ \forall i \in \{1, ..., n\}$$

entonces

$$P_\lambda \left[P_{\lambda_i}^{-1}(U_{\lambda_i}) \right] = X_\lambda, \text{ si } \lambda \neq \lambda_i$$

Por consiguiente tenemos

$$\bigcap_{i=1}^{n} P_{\lambda_i}^{-1}(U_{\lambda_i}) = U_{\lambda_1} \times \cdots \times U_{\lambda_n} \times \prod_{\lambda \neq \lambda_1, .., \lambda_n} X_\lambda \subseteq U;$$

luego, si $\lambda \neq \lambda_1, ..., \lambda_n$,

$$X_\lambda = P_\lambda \left[\bigcap_{i=1}^{n} P_{\lambda_i}^{-1}(U_{\lambda_i}) \right] \subseteq P_\lambda(U)$$

es decir, $X_\lambda = P_\lambda(U)$ que no puede ser sino compacto. Por lo tanto, X_λ es compacto si $\lambda \neq \lambda_1, ..., \lambda_n$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Primero veamos que todo producto topológico de espacios localmente compactos en número finito es localmente compacto. En efecto, si $X_1, ..., X_n$ son espacios localmente compactos y $X = X_1 \times \cdots \times X_n$, sea $x = (x_1, ..., x_n) \in X$. Se sabe que si para cada i se tiene una base local $\left(U_j^i\right)_{j \in J_i}$ en x_i, entonces

$$\left\{ U_{j_1}^1 \times \cdots \times U_{j_n}^n \right\}_{j_i \in J_i}$$

es una base local en x. De ese modo, si para cada x_i tomamos la base local de compactos que por hipótesis tiene, entonces el teorema de Tychonoff nos garantiza que también la base local en x estará formada por compactos. Esto prueba que en este caso todo punto del producto posee una base local de vecindades compactas.

Ahora supongamos que la familia $(X_\lambda)_\Lambda$ es arbitraria. Sea $x = (\Lambda, f) \in X$; una base local en x es de la forma

$$\mathcal{B} = \left\{ U_{j_1}^{\lambda_1} \times \cdots \times U_{j_k}^{\lambda_k} \times \prod_{\lambda \neq \lambda_1, .., \lambda_k} X_\lambda \mid \left(U_{j_i}^{\lambda_i} \right)_{j_i \in J_i} \text{ es base local en } f(\lambda_i) \right\}$$

Por (b), existen $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \Lambda$ tales que, si $\lambda \neq \lambda_1, ..., \lambda_n$, entonces X_λ es compacto; además, es claro que siempre que un miembro de $\mathcal{B}$ tiene uno ó más factores que no son compactos es posible sustituirlos por factores que sí lo son, pues, por (b), cada coordenada de x (y particularmente todas las de la forma $f(\lambda_i)$) posee una base local de vecindades compactas. De aquí, y del teorema de Tychonoff, que x posea una base local de vecindades compactas. Por lo tanto, X es localmente compacto.@

El miércoles tengo un compromiso y no podré venir. Si no tienen inconveniente, continuaremos el jueves.[27]

10.4 Compactación de espacios topológicos

Agosto 27 de 1987.

Definición. Sea X un espacio topológico arbitrario. Una **compactación de X** es una pareja (K, h), donde K es compacto y $h : X \to K$ es una inmersión cuya imagen $h(X)$ es densa en K. Si $K - h(X)$ es un punto, se dice que (K, h) es una **compactación de X agregando un punto**.

[27] Nadie dijo *no*.

Ejemplos de compactaciones agregando un punto: 1. En $\mathbb{R}$ con la topología usual consideremos el espacio $[0,1)$ con la topología inducida y la inclusión

$$\iota : [0,1) \to [0,1]$$

Entonces $([0,1], \iota)$ es una compactación de $[0,1)$ agregando el punto 1, ya que $[0,1]$ es compacto, ι es una inmersión (es continua e inyectiva y $\tau \mid [0,1)$ es inicial respecto a ι y a $\tau \mid [0,1]$) y su imagen $\iota([0,1))$ es densa en $[0,1]$.

2. Sea $h : \mathbb{R} \to S^1 - \{(0,1)\}$ la función que asocia a cada real x el punto de intersección de la recta que pasa por x y por $(0,1)$ con S^1, es decir, si ℓ es la recta

$$(1-t)(0,1) + t(x,0)$$

entonces

$$h(x) = \ell \cap S^1$$

o en forma vectorial

$$h(x) = \left(\frac{2x}{x^2+1}, \frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$$

Los cuatro argumentos que siguen mostrarán que h es un homeomorfismo.

1º Si x_1 y x_2 son puntos distintos en $\mathbb{R}$, entonces las rectas que los unen al polo $(0,1)$ de S^1son rectas distintas; en consecuencia, también son distintos los puntos $h(x_1)$ y $h(x_2)$ de dichas rectas porque el único punto en común de éstas es el $(0,1)$ (y ni $h(x_1)$ ni $h(x_2)$ son este punto)[28]. Esto significa que h es inyectiva.

2º Si y es un elemento arbitrario en $S^1 - \{(0,1)\}$, entonces la recta ℓ que une a y con $(0,1)$ no es paralela al eje X y, por tanto, lo corta en un punto único; i.e.

$$\exists! x \in \mathbb{R}.\ni.h(x) = y$$

lo que significa que h es suprayectiva.

3º Es fácil ver geométricamente que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall U \in \mathcal{N}^\circ_{h(x),S^1} \exists V \in \mathcal{N}^\circ_x .\ni. h(V) \subseteq U$$

por lo tanto, h es continua.

4º Sea $(a,b) \subset \mathbb{R}$, con $a < b$; entonces $h(a,b)$ es la intersección de $S^1 - \{(0,1)\}$ con el cono abierto de vértice en $(0,1)$ determinado por (a,b). Por lo tanto, $h(a,b)$ es un abierto en $S^1 - \{(0,1)\}$; por lo tanto, h es abierta.

Por otro lado, se sabe que si $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ es continua y $f \mid^{(f(X),\sigma|f(X))}_{(X,\tau)}$ es un homeomorfismo, entonces τ es la topología inicial correspondiente a f y σ; como además de esto, en nuestro caso h es inyectiva, entonces

$$h : \mathbb{R} \to S^1$$

es una inmersión topológica. Y como $h(\mathbb{R}) = S^1 - \{(0,1)\}$ es denso en S^1 y S^1 es compacto, entonces $\left(S^1, h\right)$ es una compactación de $\mathbb{R}$ agregando el punto $(0,1)$.

3. Generalizando la idea anterior, supongamos que $n \geq 1$ y definamos

$$h : \mathbb{R}^n \to S^n - \{(0,...,0,1)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

en forma similar a como lo hicimos antes, es decir, a cada

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$$

le asociaremos el punto de intersección de la n-esfera con la recta $\ell \subset \mathbb{R}^{n+1}$ que une a

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

[28] Ese caso queda excluido al sentar la ecuación que define a h.

con el polo norte de S^n. En forma paramétrica ℓ puede describirse como

$$\left\{(tx_1, tx_2, ..., tx_n, 1-t) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \in \mathbb{R}\right\}$$

De entre estos vectores, $\ell \cap S^n$ es aquel cuyo parámetro $t \neq 0$ satisface la ecuación de la n-esfera, i.e.

$$(tx_1)^2 + (tx_2)^2 + ... + (tx_n)^2 + (1-t)^2 = 1$$

De aquí resulta

$$t = \frac{2}{\|x\|^2 + 1}$$

Por lo tanto

$$h(x) = \left(\frac{2x_1}{\|x\|^2+1}, \frac{2x_2}{\|x\|^2+1}, ..., \frac{2x_n}{\|x\|^2+1}, \frac{\|x\|^2-1}{\|x\|^2+1}\right)$$

Una extensión de las observaciones anteriores puede mostrar que h es un homeomorfismo. Su inversa

$$h^{-1} : S^n - \{(0, ..., 0, 1)\} \to \mathbb{R}^n$$

se llama **proyección estereográfica**.

Agosto 28 de 1987.

10.4.1 Existencia de compactaciones agregando un punto.

Teorema. Sea (X, τ) un espacio topológico cualquiera y sea

$$X^* = X \cup \{*\}, \text{ donde } * \notin X$$

Entonces: (a)

$$\tau^* = \tau \cup \{\{*\} \cup U \mid U \in \tau \text{ y } X - U \text{ es compacto}\}$$

es una topología para X^* tal que (X^*, τ^*) es compacto.

(b) $\tau^* \mid X = \tau$

(c) X es denso en X^* si, y sólo si, X no es compacto.

(d) Si $(X, \tau) \in T_2$, entonces $(X^*, \tau^*) \in T_2$ si, y sólo si, (X, τ) es localmente compacto.

Demostración. (a) Para empezar veamos que

$$\tau^* - \tau = \{\{*\} \cup U \mid U \in \tau \text{ y } X - U \text{ es compacto}\}$$

es cerrado bajo la formación de uniones arbitrarias. Sea $\varrho \subseteq \tau^* - \tau$; entonces

$$\varrho = \{\{*\} \cup U_i \mid U_i \in \tau \text{ y } X - U_i \text{ es compacto}\}_{i \in J}$$

$$\therefore \cup\varrho = \bigcup_{i \in J} (\{*\} \cup U_i) = \{*\} \cup \left(\bigcup_{i \in J} U_i\right)$$

Pero $X - \bigcup_{i \in J} U_i = \bigcap_{i \in J} (X - U_i)$ es un cerrado contenido en cada compacto $X - U_i$. Luego, $X - \bigcup_{i \in J} U_i$ es compacto; y como $\bigcup_{i \in J} U_i \in \tau$, entonces $\cup\varrho \in \tau^* - \tau$. Valiéndonos de esta observación podemos ver que también τ^* es cerrada bajo uniones cualesquiera. En efecto, sea $\sigma \subseteq \tau^*$; entonces σ puede partirse en dos conjuntos σ_1 y σ_2 tales que $\sigma_1 \subseteq \tau$ y $\sigma_2 \subseteq \tau^* - \tau$. En consecuencia tenemos

$$\cup\sigma = (\cup\sigma_1) \cup (\cup\sigma_2)$$

con $\cup\sigma_1 \in \tau$ y $\cup\sigma_2 \in \tau^* - \tau$. Por lo tanto, si σ_1 o σ_2 fuesen vacíos, $\cup\sigma \in \tau^*$. Supongamos que ni $\sigma_1$ni σ_2 son vacíos; sean $U = \cup\sigma_1$ y $V = \cup\sigma_2$. Como $V \in \tau^* - \tau$, existe un abierto W en X, de complemento compacto, tal que $\{*\} \cup W = V$. Entonces

$$\cup\sigma = U \cup V = U \cup (\{*\} \cup W) = \{*\} \cup (U \cup W)$$

Pero $X - (U \cup W) = (X - U) \cap (X - W)$ es un cerrado dentro del compacto $X - W$; luego, es compacto. Por lo tanto, $U \cup V \in \tau^* - \tau$; por lo tanto, τ^* es cerrada bajo la formación de uniones arbitrarias.

También lo es bajo la formación de intersecciones finitas. En efecto, si J es finito y $\sigma = (U_i)_J \subseteq \tau^*$, entonces podemos partir a J en dos conjuntos ajenos J_1 y J_2 y tener

$$U_i \in \begin{cases} \tau, \text{ si } i \in J_1 \\ \tau^* - \tau, \text{ si } i \in J_2 \end{cases}$$

Sean $\sigma_1 = (U_i)_{J_1}$ y $\sigma_2 = (U_i)_{J_2}$; entonces, para toda $i \in J_2$ existen abiertos W_i en X, de complemento compacto, tales que $\{*\} \cup W_i = U_i$. En consecuencia

$$\cap \sigma_2 = \bigcap_{i \in J_2} U_i = \bigcap_{i \in J_2} (\{*\} \cup W_i) = \{*\} \cup \left(\bigcap_{i \in J_2} W_i \right)$$

y como $X - \bigcap_{i \in J_2} W_i = \bigcup_{i \in J_2} (X - W_i)$ es una unión finita de compactos, también es un compacto. Por lo tanto, $\cap \sigma_2 \in \tau^* - \tau$. Por otra parte tenemos

$$\cap \sigma = \bigcap_{i \in J} U_i = \left(\bigcap_{i \in J_1} U_i \right) \cap \left(\bigcap_{i \in J_2} U_i \right) = (\cap \sigma_1) \cap (\cap \sigma_2)$$

Si $\sigma_1 = \varnothing$, entonces $\cap \sigma_1 = X^*$ y tenemos

$$\cap \sigma = X^* \cap (\cap \sigma_2) = \cap \sigma_2 \in \tau^* - \tau$$

Si $\sigma_1 \neq \varnothing$, y hacemos $U = \cap \sigma_1$ y $V = \cap \sigma_2$, entonces existe un abierto W en X, de complemento vacío, tal que $\{*\} \cup W = V$, y tenemos

$$\cap \sigma = U \cap V = U \cap (\{*\} \cup W) = U \cap W \in \tau$$

Por lo tanto, τ^* es cerrada bajo la formación de intersecciones finitas. Esto prueba que τ^* es una topología para X^*.

Ahora demostraremos que (X^*, τ^*) es compacto. Sea $\mathcal{A} = (A_\lambda)_\Lambda$ una cubierta abierta arbitraria de X^*; entonces debe existir un abierto del tipo $\{*\} \cup V$ en $\mathcal{A}$. Por cubrir a X^*, $\mathcal{A}$ cubre en particular a $X - V$, que es compacto; por lo tanto, para $X - V$ existe un número finito de miembros de $\mathcal{A}$

$$A_1, A_2, ..., A_n$$

tales que $X - V \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. En consecuencia

$$\{A_1, A_2, ..., A_n\} \cup \{\{*\} \cup V\}$$

es una subcubierta finita de $\mathcal{A}$ que cubre a X^*. Por lo tanto, X^* es compacto.

(b) De acuerdo con la definición de topología relativa,

$$\tau^* \mid X = \{W \cap X : W \in \tau^*\}$$

Claramente, $\tau \subseteq \tau^* \mid X$. Recíprocamente, sea $W \cap X \in \tau^* \mid X$; si $W \in \tau$, entonces $W \cap X \in \tau$; si $W \in \tau^* - \tau$, entonces existe $V \in \tau$ tal que $W = \{*\} \cup V$ y tenemos

$$X \cap W = X \cap (\{*\} \cup V) = V \in \tau$$

Por lo tanto, $\tau^* \mid X = \tau$.

(c) La proposición que asegura que

$$X \text{ es denso en } X^* \Leftrightarrow X \text{ no es compacto}$$

es equivalente a la siguiente:

$$X \text{ es compacto en } X^* \Leftrightarrow X \text{ no es denso en } X^*$$

Demostraremos esta proposición.

($\Rightarrow$) Si X es compacto, entonces $\varnothing$ es un abierto en X que tiene complemento compacto; en consecuencia

$$\{*\} = \{*\} \cup \varnothing \in \tau^* - \tau \subset \tau^*$$

Luego, $\{*\}$ es una vecindad abierta de $*$ sin puntos de X; por lo tanto, X no es denso en X^*.

($\Leftarrow$) Si X no es denso en X^*, entonces

$$X \subseteq \overline{X} \subset X \cup \{*\}$$

Por lo tanto, $* \notin \overline{X}$; luego

$$\overline{X} \subseteq (X \cup \{*\}) - \{*\}$$

es decir, X es cerrado en X^* que, por (a), es compacto. Por lo tanto, X es compacto.

(d) Por hipótesis, $(X, \tau) \in T_2$.

($\Rightarrow$) Supongamos que también $(X^*, \tau^*) \in T_2$. Sea $x \in X$; entonces $x \neq *$ y existen vecindades abiertas y ajenas U y V de x y $*$, respectivamente. En consecuencia, V contiene un abierto del tipo $\{*\} \cup W$, donde $W \in \tau$ y $X - W$ es compacto. Luego

$$x \in U \subseteq X^* - V \subseteq X - W$$

Por lo tanto, $X - W$ es una vecindad compacta de x. Por lo tanto, X es localmente compacto.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora la compacidad local para X. Por hipótesis, cualesquiera dos de sus puntos son separables según la condición de Hausdorff. Por consiguiente, para demostrar que $X^* \in T_2$ basta verificar esta condición para $*$ y para cualquier $x \in X$. Sea C una vecindad compacta de x *en* X; C es cerrada, porque X es de Hausdorff. Por lo tanto

$$[\{*\} \cup (X - C)] \in \mathcal{N}_*^\circ \quad \text{y} \quad C \cap [\{*\} \cup (X - C)] = \varnothing$$

Así concluye la demostración del teorema.@

Agosto 31 de 1987.

[29]

Definición. Cuando X no es compacto, la compactación (X^*, τ^*) se llama **compactación agregando el punto al infinito**.

Ejercicios: 6. Probar que todo espacio de Hausdorff localmente compacto es de Tychonoff. (Sugerencia: Usar el inciso (d) del teorema anterior).

7. Sea X un espacio topológico que no es compacto. Si

$$\mathcal{B} = \{B \subseteq X : B \text{ es abierto y } X - B \text{ es compacto}\}$$

probar que: (a) $\mathcal{B}$ es una base de filtro en X.

(b) Si $\mathcal{F}$ es el filtro en X^* generado por $\mathcal{B}$, entonces $\mathcal{F} \to *$.

Septiembre 2 de 1987.

Teorema. Sean X y Y espacios topológicos tales que X no es compacto y Y no es vacío, y sea $f : X \to Y$ una función continua arbitraria. Son equivalentes:

(a) f puede extenderse a X^* de manera continua.

(b) El filtro $\mathcal{G}$ en Y generado por $f(\mathcal{B})$ es convergente, donde $\mathcal{B}$ es la base de filtro del ejercicio anterior.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Sea $f^* : X^* \to Y$ una extensión continua de f y sean, $y_0 = f^*(*)$ y $V \in \mathcal{N}_{y_0}$. Debido a la continuidad de f^*, existe un abierto del tipo $\{*\} \cup U$ tal que

$$f^*(\{*\} \cup U) \subseteq V$$

[29] XXV aniversario de la independencia de Trinidad y Tobago.

Pero U es abierto y $X - U$ es compacto; $\therefore U \in \mathcal{B}$; $\therefore f(U) \in f(\mathcal{B})$; y como $f(U) \subseteq V$, entonces $V \in \mathcal{G}$. Pero V es cualquier vecindad de y_0; $\therefore \mathcal{G} \to y_0$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Sea y_0 el punto al cual converge el filtro $\mathcal{G}$ y sea $f^* : X^* \to Y$ la función tal que

$$f^* \mid X = f \quad \text{y} \quad f^*(*) = y_0;$$

f^* es continua en X porque $X \in \tau^*$ y $f^* \mid X = f$ es continua; para asegurar que es continua en todo X^* sólo falta verificar que lo sea en $*$. Debido a la convergencia de $\mathcal{G}$, $\mathcal{N}_{y_0} \subseteq \mathcal{G}$; por lo tanto, dada $V \in \mathcal{N}_{y_0}$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $f(B) \subseteq V$. Con esta B formemos el abierto $U = \{*\} \cup B$; entonces

$$f^*(U) = f^*(\{*\}) \cup f^*(B) = \{y_0\} \cup f(B) \subseteq V$$

Esto prueba que f^* es continua en $*$ y, por lo tanto, es continua.@

Corolario. Si (X, τ) no es compacto, entonces la compactación (X^*, τ^*) es tal que τ^* es la topología más grande de todas las topologías de las compactaciones de X agregando un punto.

Demostración. Sea $(X^\star, \tau^\star)$ cualquier compactación de X agregando un punto $\star$. Definamos $f^* : X^* \to X^\star$ como la función tal que

$$f^* \mid X = 1_X \quad \text{y} \quad f^*(*) = \star$$

Sea $V \in \mathcal{N}_\star^\circ$ y sea $U = V \cap X$; entonces $U \in \tau$ y $X - U$ es compacto (porque coincide con $X^\star - V$). Por lo tanto, $U \in \mathcal{B}$; y como $U = 1_X(U) \subseteq V$, entonces $V \in \mathcal{G}$. Luego

$$\mathcal{G} \to \star$$

En consecuencia, por (b) del teorema anterior, f^* es continua. En particular es continua $f^* \mid X = 1_X$; $\therefore \tau^\star \subseteq \tau^*$.@

10.4.2 Compactación de Stone-Čech

Septiembre 4 de 1987.

Definición. Sea X un espacio de Tychonoff. Si $\mathbf{C}_X$ es el conjunto de las funciones continuas de X en $I = [0, 1]$, se sabe que la única función

$$i_X : X \to I^{\#\mathbf{C}_X}$$

tal que

$$\begin{tikzcd} & I & \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "i_X"] & \circlearrowleft & I^{\#\mathbf{C}} \arrow[ul, "P_f"'] \end{tikzcd}$$

es una inmersión. Ahora sea $\beta(X) = \overline{i_X(X)}$; entonces

$$i_X \mid^{\beta(X)} : X \to \beta(X)$$

se llama **compactación de Stone-Čech**.

Septiembre 7 de 1987.

<u>*Ejercicio:*</u> 8. Sea X cualquier espacio de Tychonoff. Si (K, h) es una compactación de X en la que $K \in T_2$ y para toda función continua $h' : X \to K'$, con K' compacto y T_2, existe una única extensión continua de h' a K, probar que existe un homeomorfismo $\lambda : \beta(X) \to K$ tal que conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & K & \\ X \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "i_X \mid^{\beta(X)}"] & & \beta(X) \arrow[ul, "\lambda"'] \end{tikzcd}$$

10.5 K-espacios (generalización de los espacios localmente compactos)

Definiciones. $a)$ Un **sumidero de funciones (sumidero en Set)** es una pareja $((f_i)_J, X)$ en la que X es un conjunto arbitrario y $(f_i)_J$ una clase arbitraria de funciones $f_i : X_i \to X$. En tal caso, X es el **codominio del sumidero** y la clase $(X_i)_J$ es el **dominio del sumidero**.

$b)$ Si $\mathcal{S} = ((f_i)_J, X)$ es un sumidero cuyo dominio es una familia $(X_i, \tau_i)_J$ de espacios topológicos, entonces la **topología final**[30] **para X correspondiente a** $(\tau_i)_J$ **y a** $(f_i)_J$ es

$$\tau = \left\{U \subseteq X : f_i^{-1}(U) \in \tau_i, \forall i \in J\right\}$$

En tal caso se dice que el sumidero $\mathcal{S}$ **es final.**

$c)$ Un **sumidero de funciones continuas (sumidero en Top)** es una pareja $((f_i)_J, (X, \tau))$ en la que (X, τ) es un espacio topológico y $(f_i)_J$ una clase arbitraria de funciones continuas $f_i : (X_i, \tau_i) \to (X, \tau)$.

Proposición. Sea $\mathcal{S} = \left((X_i, \tau_i) \xrightarrow{f_i} (X, \tau)\right)_J$ cualquier sumidero de funciones continuas; son equivalentes:

(a) $\mathcal{S}$ es final.

(b) τ es la topología más grande para X según la cual cada f_i es continua.

(c) Si $g : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ es cualquier función tal que $gf_i : (X_i, \tau_i) \to (Y, \sigma)$ es continua para toda $i \in J$, entonces g es continua.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Sea τ' una topología para X con la que resulten continuas las funciones f_i; entonces

$$U' \in \tau' \Rightarrow f_i^{-1}(U') \in \tau_i, \forall i \in J$$

Por (a), $U' \in \tau$; por lo tanto, $\tau' \subseteq \tau$.

$(b) \Rightarrow (a)$ Hay que probar que

$$\tau = \left\{U \subseteq X : f_i^{-1}(U) \in \tau_i, \forall i \in J\right\}$$

$\subseteq)$ Sea $U \in \tau$; como cada f_i es continua según τ, tenemos

$$f_i^{-1}(U) \in \tau_i, \forall i \in J$$

$$\therefore \tau \subseteq \left\{U \subseteq X : f_i^{-1}(U) \in \tau_i, \forall i \in J\right\}$$

$\supseteq)$ Recíprocamente; sabemos que

$$\left\{U \subseteq X : f_i^{-1}(U) \in \tau_i, \forall i \in J\right\}$$

es una topología para X según la cual cada f_i es continua, y que, por (b), τ es la más grande con la que se consigue esto. Luego

$$\left\{U \subseteq X : f_i^{-1}(U) \in \tau_i, \forall i \in J\right\} \subseteq \tau$$

Por lo tanto, el sumidero $\mathcal{S}$ es final.

$(a) \Rightarrow (c)$ Sea $g : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ cualquier función tal que $gf_i : (X_i, \tau_i) \to (Y, \sigma)$ es continua, para toda $i \in J$. Entonces

$$V \in \sigma \Rightarrow (gf_i)^{-1}(V) = f_i^{-1}\left(g^{-1}(V)\right) \in \tau_i, \forall i \in J$$

Por (a), $g^{-1}(V) \in \tau$; por lo tanto, g es continua.

$(c) \Rightarrow (b)$ Sea τ' una topología para X con la que resulten continuas las funciones f_i. Entonces, cuando compongamos la identidad

$$1_X : (X, \tau) \to (X, \tau')$$

con f_i obtendremos en cada caso una función continua

$$1_X f_i = f_i : (X_i, \tau_i) \to (X, \tau')$$

Por (c), 1_X también es continua; por lo tanto, $\tau' \subseteq \tau$, que es a lo que se quería llegar.@

[30] También llamada **fuerte**.

Definición. Un **K-espacio** (X,τ) es un espacio topológico en el cual el sumidero de las inclusiones de subconjuntos compactos de X es un sumidero final.

Ejercicio: 9. Probar (separadamente) que (X,τ) es un K-espacio en cualquiera de los casos siguientes:
a) Cuando (X,τ) es compacto.
b) Cuando (X,τ) es localmente compacto.

Proposición. Sea (X,τ) cualquier espacio T_2; son equivalentes:
(a) (X,τ) es un K-espacio.
(b) $A \subseteq X$ es cerrado en X si, y sólo si, la intersección de A con cualquier compacto de X es cerrada en X.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) ($\Rightarrow$) Como X es T_2, $A \cap C$ es cerrado, para todo compacto $C \subseteq X$.
($\Leftarrow$) Sea $(C_i)_J$ la familia de subconjuntos compactos de X; por (a), es final el sumidero

$$\mathcal{S} = \{\iota_i : (C_i, \tau \mid C_i) \hookrightarrow (X,\tau)\}_J$$

Supongamos que $A \subseteq X$ es tal que $A \cap C_i$ es cerrado,$\forall i \in J$. Sea $U = X - A$; entonces

$$\iota_i^{-1}(U) = U \cap C_i = C_i - A = C_i - (C_i \cap A) \in \tau \mid C_i, \forall i \in J$$

Pero, por (a), esto ocurre ssi $U \in \tau$. Por lo tanto, A es cerrado.
(b) $\Rightarrow$ (a) Sea

$$\mathcal{S} = \{\iota_i : (C_i, \tau \mid C_i) \hookrightarrow (X,\tau)\}_J$$

Hay que probar que

$$U \in \tau \Leftrightarrow \iota_i^{-1}(U) \in \tau \mid C_i, \forall i \in J$$

($\Rightarrow$) Cada inclusión es continua, luego

$$U \in \tau \Rightarrow \iota_i^{-1}(U) \in \tau \mid C_i, \forall i \in J$$

($\Leftarrow$) Sea $U \subseteq X$ tal que $\iota_i^{-1}(U) \in \tau \mid C_i$, para toda $i \in J$, i.e. $U \cap C_i \in \tau \mid C_i, \forall i \in J$; En consecuencia, es cerrado en cada compacto C_i el conjunto

$$C_i - (U \cap C_i) = C_i \cap (X - U)$$

Por (b), $X - U$ es cerrado. Por lo tanto, $X \in \tau$.@

Ejercicio: 10. Sea (X,τ) cualquier espacio topológico. Probar que al concepto de K-espacio lo caracteriza la implicación siguiente:

$$U \cap C \in \tau \mid C, \forall C \subseteq X \text{ compacto} \Rightarrow U \in \tau$$

10.6 *Apéndice*[31]

Recordemos la definición de normalidad.

Definición. Un espacio topológico X es **normal** si para cualquier par de subconjuntos cerrados y ajenos de X existen sendas vecindades abiertas y ajenas.

Proposición. Sea X cualquier espacio topológico; X es normal si, y sólo si, toda vez que un cerrado C se halla contenido en un abierto U de X existe otro abierto V, que también contiene a C, tal que $\overline{V} \subseteq U$.

Demostración. $\Rightarrow$) Sea C cualquier cerrado en X y U cualquier abierto tal que $C \subseteq U$; entonces $X - U \subseteq X - C$; por lo tanto C y $X - U$ son cerrados ajenos de X. Debido a la normalidad, existen dos abiertos ajenos V_1 y V_2 tales que

$$C \subseteq V_1 \quad \text{y} \quad X - U \subseteq V_2$$

En consecuencia

$$V_1 \subseteq X - V_2 \subseteq U$$

[31]Véase la nota a pie de página que siguió al enunciado del Lema de Urysohn en la clase del 10 de agosto de 1987.

$$\therefore \overline{V_1} \subseteq X - V_2; \;\; \therefore \overline{V_1} \subseteq U$$

$\Leftarrow$) Sean A y B cerrados ajenos de X; entonces $A \subseteq X - B$ que es abierto. Por lo tanto, existe un abierto V en X, que contiene a A, tal que $\overline{V} \subseteq X - B$. Sea $W = X - \overline{V}$; entonces, W es abierto, $B \subseteq W$ y $V \cap W = \varnothing$, porque $V \subseteq \overline{V} = X - W$.@

Lema. Supongamos que para cierto espacio topológico X arbitrario se tiene definida una familia de subconjuntos abiertos de X, $(U_r)_D$, donde D es un subconjunto denso de $\mathbb{R}$, tal que

$$(i) \quad \bigcup_{r\in D} U_r = X, \quad \bigcap_{r\in D} U_r = \varnothing$$

$$(ii) \quad \overline{U_s} \subseteq U_r, \text{ si } s < r.$$

Para cada $x \in X$ sea

$$D(x) = \{r \in D : x \in U_r\}$$

Entonces, definiendo $f : X \to \mathbb{R}$ mediante

$$f(x) = \inf D(x)$$

queda definida una función continua.

Demostración. Primero veamos que f está bien definida; para ello basta demostrar que para toda $x \in X$, $D(x)$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$ no vacío y acotado inferiormente. Sea $x \in X$; por (i) existe $r \in D$ tal que $x \in U_r$; luego, $r \in D(x)$; $\therefore D(x) \neq \varnothing$. Supongamos, por otra parte, que $D(x)$ no estubiese acotado inferiormente. Sea $r \in D$; entonces existe $s \in D(x)$ tal que $s < r$. Por (ii), tenemos

$$x \in U_s \subseteq \overline{U_s} \subseteq U_r$$

$$\therefore x \in U_r, \forall r \in D$$

lo cual contradice el hecho de que $\bigcap_{r\in D} U_r = \varnothing$. Por lo tanto $D(x)$ sí está acotado inferiormente y f está bien definida.

Para verificar la continuidad de f observemos que para cada $r \in D$ se tiene:

$$\begin{array}{lcl} (1)\; x & \in & \overline{U_r} \Rightarrow f(x) \leq r \\ (2)\; x & \notin & U_r \Rightarrow f(x) \geq r \end{array}$$

En efecto; (1) Debido a (ii), si $x \in \overline{U_r}$ entonces $x \in U_s, \forall s > r$; por lo tanto

$$\{p \in D : p > r\} \subseteq D(x)$$

Entonces, debido a la densidad de D en $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \inf D(x) \leq \inf\{p \in D : p > r\} = r$$

(2) Por otra parte, si $x \notin U_r$ entonces $x \notin U_s, \forall s \leq r$; por lo tanto $s \notin D(x)$, si $s \leq r$.

$$\therefore D(x) \subseteq \{p \in D : p > r\}$$

$$\therefore f(x) = \inf D(x) \geq \inf\{p \in D : p > r\} = r$$

Fijemos ahora cualquier elemento x_0 en X. Como D es denso en $\mathbb{R}$, la familia

$$\mathcal{B}_{f(x_0)} = \{[r,s] : r, s \in D \text{ y } r < f(x_0) < s\}$$

es una base local de vecindades de $f(x_0)$. Sea $[r,s] \in \mathcal{B}_{f(x_0)}$ cualquiera, y sea

$$U = U_s - \overline{U_r}$$

Entonces U es abierto en X porque $U = U_s \cap \left(X - \overline{U_r}\right)$; y $x_0 \in U$ pues, debido a (2), si $x_0 \notin U_s$, entonces $f(x_0) \geq s$, lo que es falso; y, debido a (1), si $x_0 \in \overline{U_r}$, entonces $f(x_0) \leq r$, lo que también es falso. Por lo tanto

$$U \in \mathcal{N}_{x_0}^{\circ}$$

Además, si $x \in U$, entonces, debido a (1)

$$f(x) \leq s, \text{ porque } x \in U_s \subseteq \overline{U_s}$$

y, debido a (2),

$$f(x) \geq r, \text{ ya que } x \notin U_r \text{ porque } x \notin \overline{U_r}$$

Por lo tanto

$$f(U) \subseteq [r, s]$$

Esto prueba que f es continua en x_0; y como este punto se escogió arbitrariamente en X, queda demostrada la continuidad de f en todo X.@

Lema de Urysohn. Cualesquiera dos subconjuntos cerrados y ajenos A y B de un espacio normal X están **completamente separados**, i.e. existe una función continua $f : X \to I$ tal que $f(A) \subseteq \{0\}$ y $f(B) \subseteq \{1\}$.

Demostración. Sean $A, B \subseteq X$ cerrados ajenos y sea $U_1 = X - B$; entonces U_1 es abierto y $A \subseteq U_1$. Como X es normal podemos aplicar la proposición anterior y asegurar que existe otro abierto U_0 tal que $A \subseteq U_0$ y $\overline{U_0} \subseteq U_1$. Emplearemos este resultado como base para la construcción inductiva de una familia de abiertos $(U_r)_D$ que satisfaga las condiciones del lema anterior.

Sea $D = \mathbb{Q}$ y numeremos los elementos de $\mathbb{Q} \cap I$ mediante cualquier sucesión $\{r_n\}$; sin perder generalidad podemos suponer que $r_1 = 1$ y que $r_2 = 0$.

Hipótesis de Inducción: Sea

$$Q_n = \{r_1, r_2, ..., r_n\}$$

y supongamos que para todo $r_j \in Q_n$ se tiene definido un abierto U_{r_j} en X de tal modo que

$$\overline{U_{r_j}} \subseteq U_{r_k}, \text{ si } r_j < r_k \text{ ...(✠)}$$

Ahora hay que definir $U_{r_{n+1}}$. Como para $r_1 = 1$ y para $r_2 = 0$ los abiertos correspondientes ya han quedado definidos, podemos suponer que $0 \neq r_{n+1} \neq 1$; entonces r_{n+1} tiene un predecesor inmediato y un inmediato sucesor en Q_{n+1}, según el orden usual. Sean r y s tales elementos, respectivamente; entonces $r < s$, y como U_r y U_s ya están definidos, podemos aplicar la hipótesis de inducción y asegurar que $\overline{U_r} \subseteq U_s$. Por la proposición anterior, existe un abierto V tal que $\overline{U_r} \subseteq V$ y $\overline{V} \subseteq U_s$. Hacemos $U_{r_{n+1}} = V$. Claramente sigue verificándose (✠) para los elementos de Q_{n+1}.

Esto prueba que para todo $n \in \mathbb{N}$ puede definirse un abierto de X, U_{r_n}, de modo que siempre se satisfaga (✠). Así concluye la construcción por inducción en $\mathbb{Q} \cap I$.[34] Para extenderla a todo $\mathbb{Q}$ definimos

$$U_r = \begin{cases} \varnothing, \text{ si } r < 0 \\ X, \text{ si } r > 1 \end{cases}$$

Claramente (ii) del lema vale ahora para todo par de números racionales. También es claro que

$$\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} U_r = X \quad \text{ y } \quad \bigcap_{r \in \mathbb{Q}} U_r = \varnothing$$

Por lo tanto, se satisfacen las condiciones del lema. Además, si

$$\mathbb{Q}(x) = \{r \in \mathbb{Q} : x \in U_r\}$$

entonces

$$0 \leq \inf \mathbb{Q}(x) \leq 1$$

[34]Un diagrama de Venn de esta construcción hace ver que se trata de un rico encebollado (con tantas "capas" como elementos en $\mathbb{Q}$) cuyo corazón es A y cuya cáscara exterior es $X - B$. Hágase el diagrama partiendo, por ejemplo, de la sucesión $\left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, ...\right\}$.

porque $\mathbb{Q}(x) \cap \mathbb{Q}^- = \varnothing$ y porque si $r \in \mathbb{Q}$ y $r > 1$, entonces $r \in \mathbb{Q}(x), \forall x \in X$. Por lo tanto, la regla

$$f(x) = \inf \mathbb{Q}(x)$$

define una función continua $f : X \to I$. Mostraremos que f es la función deseada.

En efecto, si $x \in A$, entonces $x \in U_r, \forall r \geq 0$; así

$$\mathbb{Q}(x) = \mathbb{Q} - \mathbb{Q}^- \quad y \quad f(x) = 0.$$

Por otra parte, si $x \in B$, entonces $x \notin U_r, \forall r \leq 1$, así que

$$\mathbb{Q}(x) = \{r \in \mathbb{Q} \mid r > 1\} \quad y \quad f(x) = 1.$$

Por lo tanto

$$f(A) \subseteq \{0\} \quad \text{y} \quad f(B) \subseteq \{1\}$$

como se quería demostrar.[36] @

---

[36] Las contenciones propias, como ya se dijo, ocurren cuando A o B son vacíos. Analícense estos casos.

11

Categorías de Conexión

Noviembre 9 de 1987.

Definición. Una **categoría de conexión** en topología es una clase $\underline{A}$ de espacios topológicos que satisface las condiciones siguientes:

(a) Si $A \in \underline{A}$ y $f : A \to B$ es continua y suprayectiva, entonces $B \in \underline{A}$.

(b) $A \in \underline{A}$, si $|A| \leq 1$.

(c) Si $\{A_i\}_J$ es una familia de subespacios de un espacio X tal que

$$\forall i \in J, A_i \in \underline{A} \quad \text{y} \quad \underset{i\in J}{\cap} A_i \neq \varnothing$$

entonces $\underset{i\in J}{\cup} A_i \in \underline{A}$.

<u>*Ejemplos:*</u> 1. La mínima categoría de conexión es

$$\underline{A_m} = \{A \in Top : |A| \leq 1\}$$

En efecto:

(a) Supongamos que $A \in \underline{A_m}$ y que $f : A \to B$ es continua y suprayectiva; si $A = \varnothing$, entonces $B = \varnothing$. Si $|A| = 1$ entonces, debido a la suprayectividad de f, también $|B| = 1$. Por lo tanto, $B \in \underline{A_m}$.

(b) Es obvio: $A \in \underline{A_m}$, si $|A| \leq 1$.

(c) Sea X es un espacio topológico y supongamos que $\{A_i\}_J$ es una familia de subespacios de X tal que

$$A_i \in \underline{A_m} \quad \text{y} \quad \underset{i\in J}{\cap} A_i \neq \varnothing$$

Entonces $\{A_i\}_J$ consta de un solo miembro, digamos A_{i_0}, con un solo elemento. Por consiguiente, $\underset{i\in J}{\cup} A_i = A_{i_0} \in \underline{A_m}$.

Esto prueba que $\underline{A_m}$ es una categoría de conexión; y es la más chica, pues si $\underline{A}$ es cualquiera otra entonces, por (b) de la definición, $\underline{A_m} \subseteq \underline{A}$ que es justo lo que se postula en ese inciso.@

2. La máxima categoría de conexión es

$$\underline{A_M} = Top$$

(la clase de todos los espacios topológicos).

Definiciones. Sea X un conjunto arbitrario.

a) Una **cadena** en X es una sucesión finita $A_1, ..., A_n$ de subconjuntos de X tal que si $n \geq 1$ y $A_i \neq \varnothing$ p.a. $1 \leq i \leq n$, entonces $A_i \neq \varnothing, \forall i \in \{1, ..., n\}$ y además $A_i \cap A_{i+1} \neq \varnothing$. *Desde luego,* los miembros de la cadena se llaman **eslabones**.

b) Una **familia encadenada de subconjuntos** de X es una familia tal que si no es vacía y algún miembro suyo no es vacío, entonces los demás miembros tampoco lo son, y para dos elementos cualesquiera A y B existe una cadena $A_1, ..., A_n$ de elementos de la familia tal que $A_1 = A$ y $A_n = B$.

Teorema. Sea $\underline{A}$ una clase arbitraria de espacios topológicos; son equivalentes:

(a) $\underline{A}$ es de conexión.

(b) $\underline{A}$ satisface las condiciones siguientes:

(i) Si $A \in \underline{A}$ y $f : A \to B$ es continua y suprayectiva, entonces $B \in \underline{A}$.

(ii) $\underline{A}$ posee un miembro no vacío.

(iii) Si X es cualquier espacio topológico y $\mathcal{F}$ es una familia encadenada en X cuyos miembros pertenecen a $\underline{A}$, entonces $\cup\mathcal{F} \in \underline{A}$.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Por (a) y (b) de la definición se satisfacen las condiciones (i) y (ii). Sea $\mathcal{F}$ cualquier familia encadenada en X. Si $\mathcal{F} = \varnothing$, entonces $\cup\mathcal{F} = \varnothing$; y como $|\varnothing| = 0$, entonces, por (b), $\cup\mathcal{F} \in \underline{A}$. Si $\mathcal{F} \neq \varnothing$ y todos sus miembros son vacíos[1], entonces $\cup\mathcal{F} = \varnothing \in \underline{A}$. Veamos qué pasa cuando ningún miembro de $\mathcal{F}$ es vacío y todos pertenecen a $\underline{A}$. Sean, $A \in \mathcal{F}$ y

$$\mathcal{F}_A = \{F \in \mathcal{F} \mid \text{existe una cadena de } A \text{ a } F \text{ con eslabones en } \mathcal{F}\}$$

Como $\mathcal{F}$ está encadenada, es claro que $\mathcal{F}_A = \mathcal{F}$. Ahora aplicaremos inducción para mostrar que la unión de eslabones de cada cadena del tipo

$$A_1, ..., A_n \in \mathcal{F}.\ni.A_1 = A,\ A_n = F$$

es miembro de $\underline{A}$. En efecto, por definición de cadena tenemos que $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$, y como cada $A_i \in \underline{A}$, entonces, por (c), $A_1 \cup A_2 \in \underline{A}$. Supongamos que $A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1} \in \underline{A}$; como $A_{n-1} \cap A_n \neq \varnothing$, entonces $(A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cap A_n \neq \varnothing$; de modo que, también por (c), $(A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cup A_n \in \underline{A}$. Como esto ocurre para todo $F \in \mathcal{F}_A$, y como A es eslabón común de todas estas cadenas, entonces $\cup\mathcal{F}_A \in \underline{A}$; $\therefore \cup\mathcal{F} \in \underline{A}$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Por (i), $\underline{A}$ satisface (a) de la definición.

(b) Sea $A \in Top$; si $|A| = 1$, por (ii) existe $B \in \underline{A}$ tal que $B \neq \varnothing$. Sea $f : B \to A$ la única función definible; entonces f es continua y suprayectiva (porque es constante). Por lo tanto, debido a (i), $A \in \underline{A}$. Por otra parte, si $|A| = 0$, entonces $A \in \underline{A}$, pues si $\mathcal{F}$ es la familia vacía de subespacios de un espacio topológico X, entonces $\mathcal{F}$ está encadenada y, por (iii), $\cup\mathcal{F} \in \underline{A}$, i.e. $\varnothing \in \underline{A}$.

(c) Supongamos que $\{A_i\}_J$ es una familia de subespacios de X que son miembros de $\underline{A}$ y que $\bigcap_{i\in J} A_i \neq \varnothing$. Obviamente $\{A_i\}_J$ está encadenada; por (iii), $\bigcup_{i\in J} A_i \in \underline{A}$.@

Noviembre 11 de 1987.

<u>*Octava tanda de ejercicios:*</u> 1. Sea $f : X \to Y$ una función suprayectiva; probar que:

$a)$ Si $A_1, ..., A_n$ es una cadena en X, entonces $f(A_1), ..., f(A_n)$ es una cadena en Y.

$b)$ Si $\mathcal{F}$ es una familia encadenada en X, entonces

$$\{f(A) : A \in \mathcal{F}\}$$

es una familia encadenada en Y.

2. Sea X un conjunto arbitrario. Si $\mathcal{D}_2$ es la familia de los subconjuntos de X de cardinalidad 2, probar que $\mathcal{D}_2$ es una familia encadenada en X.

3. Sea $(A_i)_J$ una familia encadenada en X; si para cada $i \in J$ es $(A_{ij})_{J_i}$ una familia encadenada en A_i, probar que

$$\{A_{ij} : i \in J,\ j \in J_i\}$$

es una familia encadenada en X.

Proposición. Sea D_2 el espacio discreto de número cardinal 2, entonces Top es la única categoría de conexión que contiene a D_2.

Demostración. Sea $\underline{A}$ cualquier categoría de conexión tal que $D_2 \in \underline{A}$. Si X es cualquier espacio topológico y $|X| \leq 1$, entonces $X \in \underline{A}$. Supongamos que $|X| > 1$; sean, $\mathcal{D}_2$ la familia de subconjuntos de X de cardinalidad 2 y $A \in \mathcal{D}_2$. Entonces existe $f : D_2 \to A$ continua y suprayectiva; $\therefore \mathcal{D}_2 \subseteq \underline{A}$. Pero, por el ejercicio 2, $\mathcal{D}_2$ está encadenada en X; luego, podemos aplicar la condición (iii) del teorema anterior y asegurar que $\cup\mathcal{D}_2 \in \underline{A}$. Por lo tanto, $X \in \underline{A}$; $\therefore \underline{A} = Top$.@

TEOREMA. Sea $(\underline{A}_i)_I$ cualquier familia de categorías de conexión; entonces $\underline{A} = \bigcap_{i\in I} \underline{A}_i$ es de conexión.

Demostración. (a) Sea $f : A \to B$ cualquier función continua y suprayectiva con $A \in \underline{A}$; entonces $A \in \underline{A}_i$, $\forall i \in I$; $\therefore B \in \underline{A}_i$, $\forall i \in I$; $\therefore B \in \underline{A}$.

(b) Si X es un espacio topológico tal que $|X| \leq 1$, entonces $X \in \underline{A}_i, \forall i \in I$; $\therefore X \in \underline{A}$.

(c) Sea $(A_j)_J$ una familia de subconjuntos de X y supongamos que $A_j \in \underline{A}, \forall j \in J$ y que $\bigcap_{j\in J} A_j \neq \varnothing$; entonces $A_j \in \underline{A}_i, \forall i \in I$; $\therefore \bigcup_{j\in J} A_j \in \underline{A}_i, \forall i \in I$; $\therefore \bigcup_{j\in J} A_j \in \underline{A}$. Por lo tanto $\underline{A}$ es de conexión.@

[1]Sólo hay dos casos: todos vacíos ó todos no vacíos.

Corolario. Sea $\underline{B}$ cualquier familia de espacios topológicos. Entonces existe la categoría de conexión mínima que contiene a $\underline{B}$; es **la categoría de conexión generada por $\underline{\mathbf{B}}$**. La notación que emplearemos al referirnos a ella es $[\underline{B}]$.@

Ejemplo: $[\varnothing] = \underline{A_m}$.

Ejercicio: 4. Sea X un conjunto tal que $|X| > 1$; si $\mathcal{F}$ es una cubierta encadenada en X y

$$\mathcal{F}' = \{A \in \mathcal{F} : |A| > 1\}$$

pruebe que $\mathcal{F}'$ también es una cubierta encadenada en X.

El resultado que sigue da una descripción completa de la categoría de conexión generada por cualquier familia de espacios topológicos.

Teorema. Sea $\underline{B}$ cualquier familia de espacios topológicos;

a) Si $\underline{B} \subseteq \underline{A_m}$, entonces $[\underline{B}] = \underline{A_m}$.

b) Si $\underline{B} \not\subseteq \underline{A_m}$, entonces $[\underline{B}] = \underline{A_m} \cup \underline{A'}$, donde $\underline{A'}$ es la familia de espacios topológicos que tengan una cubierta encadenada cuyos elementos son imágenes continuas de elementos de $\underline{B}$.

Demostración. a) Como $[\underline{B}]$ es la intersección de todas las categorías de conexión que contienen a $\underline{B}$, si $\underline{A_m}$ contiene a $\underline{B}$, entonces $[\underline{B}] \subseteq \underline{A_m}$. Pero $\underline{A_m}$ es la mínima categoría de conexión; luego $[\underline{B}] = \underline{A_m}$.

b) Sea $\underline{A''} = \underline{A_m} \cup \underline{A'}$; entonces $\underline{B} \subseteq \underline{A''}$, porque todo elemento de $\underline{B}$ que pertenece a $\underline{A_m}$ pertenece, obviamente, a $\underline{A''}$; y si $B \in \underline{B}$ y $B \notin \underline{A_m}$, entonces $\{B\}$ es una cubierta encadenada de B (toda cubierta con un solo elemento está encadenada) cuyo miembro es imagen continua de elementos de $\underline{B}$ (a saber, B es imagen de $B \in \underline{B}$ bajo $1_B : B \to B$ que es continua); luego $B \in \underline{A'} \subseteq \underline{A''}$. Por otro lado, $\underline{A''} \subseteq [\underline{B}]$, porque $\underline{A_m} \subseteq [\underline{B}]$ y si $A \in \underline{A'}$, entonces A posee una cubierta encadenada $(A_i)_I$ tal que cada A_i es imagen continua de algún elemento de $\underline{B}$, lo cual implica que $A_i \in [\underline{B}]\,, \forall i \in I$; por (iii), $A = \bigcup_{i \in I} A_i \in [\underline{B}]$. Por lo tanto tenemos

$$\underline{B} \subseteq \underline{A''} \subseteq [\underline{B}]$$

La prueba concluiría si demostráramos que $\underline{A''}$ es una categoría de conexión. Veamos que así acontece.

(i) Sea $f : A \to X$ continua y suprayectiva, con $A \in \underline{A''}$. Si $A \in \underline{A_m}$, entonces $X \in \underline{A_m} \subseteq \underline{A''}$. Si $A \notin \underline{A_m}$, entonces A posee una cubierta encadenada $(A_i)_I$ tal que A_i es imagen continua de elementos de $\underline{B}$. Por el ejercicio 1, $f\,(A_i)_I$ es una familia encadenada en X que, además, cubre a X porque

$$X = f\,(A) = \bigcup_{i \in I} f\,(A_i)$$

Entonces, X posee una cubierta encadenada cuyos miembros son imágenes continuas de elementos de $\underline{B}$, i.e. $X \in \underline{A'} \subseteq \underline{A''}$.

(ii) Los miembros no vacíos de $\underline{A_m}$ son miembros no vacíos de $\underline{A''}$.

(iii) Sean, X un espacio topológico arbitrario, $(A_i)_I$ una familia encadenada en X tal que $A_i \in \underline{A''}, \forall i \in I$ y $X' = \bigcup_{i \in I} A_i$ (entonces $(A_i)_I$ es una cubierta de X'); hay que probar que $X' \in \underline{A''}$. Si $|X'| \leq 1$, entonces $X' \in \underline{A_m} \subseteq \underline{A''}$. Si $|X'| > 1$, entonces, por el ejercicio 4,

$$\{A_i : |A_i| > 1\}_I$$

también es una cubierta encadenada de X'. Por definición de $\underline{A'}$, cada A_i de número cardinal mayor que 1 tiene una cubierta encadenada $(A_{ij})_{J_i}$ cuyos elementos son imágenes continuas de elementos de $\underline{B}$; por el ejercicio 3,

$$\{A_{ij} : i \in I,\, j \in J_i\}$$

es una familia encadenada en X'; luego, X' posee una cubierta encadenada cuyos miembros son imágenes continuas de elementos de $\underline{B}$, i.e. $X' \in \underline{A'} \subseteq \underline{A''}$.

Esto prueba que $\underline{A''}$ es de conexión, y el teorema queda demostrado.@

Noviembre 16 de 1987.

Teorema. Sea $\underline{A}$ una categoría de conexión arbitraria. Entonces, el producto topológico de un número finito de elementos de $\underline{A}$ pertenece a $\underline{A}$.

Demostración. Sean $A, B \in \underline{A}$; por demostrar que $A \times B \in \underline{A}$.

Sea $[A, B]$ la categoría de conexión generada por $\{A, B\}$; es claro que $[A, B] \subseteq \underline{A}$. Sea

$$\mathcal{F} = \{A \times \{b\} : b \in B\} \cup \{\{a\} \times B : a \in A\}.$$

$\mathcal{F}$ está encadenada en $A \times B$. En efecto, sean $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ cualesquiera; si

$$F_1 = A \times \{b\} \quad \text{y} \quad F_2 = \{a\} \times B$$

entonces la cadena $A_1 = F_1$ y $A_2 = F_2$ enlaza los elementos que se tomaron porque

$$A \times \{b\} \cap \{a\} \times B = \{(a, b)\} \neq \varnothing$$

Si

$$F_1 = A \times \{b_1\} \quad \text{y} \quad F_2 = A \times \{b_2\}$$

entonces fijamos $a \in A$ y hacemos $A_2 = \{a\} \times B$, de modo que si $A_1 = F_1$ y $A_3 = F_2$, entonces A_1, A_2, A_3 es una cadena de elementos de $\mathcal{F}$ que enlaza a F_1 con F_2. Similarmente ocurre si se toman

$$F_1 = \{a_1\} \times B \quad \text{y} \quad F_2 = \{a_2\} \times B$$

Además, $\mathcal{F}$ es una cubierta de $A \times B$ ya que si $(a, b) \in A \times B$, entonces

$$(a, b) \in \{a\} \times B \subseteq \bigcup_{a \in A} \{a\} \times B$$

o bien

$$(a, b) \in A \times \{b\} \subseteq \bigcup_{b \in B} A \times \{b\}$$

y como también se tienen los homeomorfismos

$$\begin{array}{ccc} A & \overset{h_A}{\to} & A \times \{b\} \\ a & \mapsto & (a, b) \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{ccc} B & \overset{h_B}{\to} & \{a\} \times B \\ b & \mapsto & (a, b) \end{array}$$

entonces $A \times B$ es un espacio topológico que posee una cubierta encadenada cuyos miembros son imágenes continuas de elementos de $\{A, B\}$; por el teorema anterior podemos concluir que $A \times B \in [A, B]$. Aplicando inducción finita se llega a que el producto de un número finito de miembros de $\underline{A}$ pertenece a $\underline{A}$, como se quería probar.@

Proposición. Sea I_2 el espacio indiscreto de número cardinal 2, entonces:

a) $[I_2]$ es la clase de todos los espacios indiscretos.

b) $[\varnothing] \subset [I_2]$ y toda categoría distinta de $[\varnothing]$ contiene a $[I_2]$.

Demostración. (a) En esta parte basta considerar el caso en que $|X| > 1$. Supongamos entonces que X es un espacio indiscreto con más de un punto. Se sabe que la familia $\mathcal{D}_2$ de parejas de puntos de X es una cubierta encadenada en X compuesta, en este caso, por subespacios indiscretos porque son inducidos por el indiscreto X; en consecuencia son homeomorfos a I_2. O sea que X posee una cubierta encadenada cuyos miembros son imágenes continuas de I_2; aplicando el teorema de la clase anterior se tiene que $X \in [I_2]$.

Recíprocamente, sea $X \in [I_2]$; se sabe que X posee una cubierta encadenada $\mathcal{F}$ cuyos miembros son imágenes continuas de I_2; si

$$\mathcal{F}' = \{F \in \mathcal{F} : |F| > 1\}$$

entonces, por el ejercicio 4, $\mathcal{F}'$ también es una cubierta encadenada en X. Por ser F imagen continua de I_2 se tiene que $|F| \leq 2, \forall F \in \mathcal{F}$; $\therefore$ $|F| = 2, \forall F \in \mathcal{F}'$, i.e. los miembros de $\mathcal{F}'$ son homeomorfos a I_2. Supongamos que existe un abierto no vacío U distinto de X; entonces debe haber dos puntos $x_1, x_2 \in X$ tales que $x_1 \in U$ y $x_2 \in X - U$. Por lo tanto existen también,

$$F_1, F_2 \in \mathcal{F}' . \ni . x_1 \in F_1, x_2 \in F_2$$

y una cadena de elementos de $\mathcal{F}'$

$$A_1, ..., A_n . \ni . A_1 = F_1, A_n = F_2$$

La concatenación entre eslabones implica que hay uno de ellos, digamos A_i, tal que

$$A_i \cap U \neq \varnothing \quad \text{y} \quad A_i \cap (X-U) \neq \varnothing$$

Pero entonces $A_i \cap U$ es un abierto relativo en A_i, no vacío y distinto de A_i $(\underset{\circ}{\nabla})$, lo cual es imposible porque A_i es un subespacio indiscreto de X. Por lo tanto, falso suponer que exista un abierto no vacío distinto de X; por lo tanto, X es indiscreto.

(b) Se tiene que $[\varnothing] \subset [I_2]$ porque $[\varnothing]$ es la mínima categoría de conexión y porque $I_2 \in [I_2]$ pero $I_2 \notin [\varnothing]$, pues $|I_2| > 1$. Supongamos ahora que $\underline{A}$ es cualquier categoría de conexión que contiene propiamente a $[\varnothing]$; entonces $\underline{A} - [\varnothing] \neq \varnothing$. Sea $X \in \underline{A} - [\varnothing]$; entonces $|X| > 1$, por lo tanto existe $f : X \to I_2$ continua y suprayectiva; $\therefore I_2 \in \underline{A}$; $\therefore [I_2] \subseteq \underline{A}$.@

Noviembre 18 de 1987.

Con frecuencia suele creerse, sobre todo por los analistas, que el espacio de Sierpinski sólo sirve para proporcionar un ejemplo que ilustra que tienen mayor fuerza las condiciones de separación de los espacios T_0 con relación a las de los espacios T_1. Sin embargo, es también con respecto a la conexidad que dicho espacio guarda cierta interesante información. Obsérvese, por lo pronto, que, aparte la trivial conexidad de espacios singulares e indiscretos, el espacio de Sierpinski es el más chiquito de los espacios conexos no triviales; esto hace sospechar que alguna relevancia ha de tener en el estudio de la conexidad la categoría de conexión generada por él. Y la tiene, en efecto; hereda, por lo pronto, la no trivial minimalidad de su generador quedando entre las categorías de conexión como la más pequeña (no trivial). Pero en este curso no podemos ahondar mucho en esta cuestión y nos limitaremos solamente a una descripción muy elemental de dicha categoría.

Proposición. Sea S el espacio de Sierpinski, entonces:

(a) Los miembros de $[S]$ de número cardinal mayor que 1 son los espacios topológicos que poseen una cubierta encadenada cuyos elementos son homeomorfos a I_2 ó a S.

(b) $[I_2] \subset [S]$ y toda categoría de conexión que contenga propiamente a $[I_2]$ contiene a $[S]$.

Demostración. (a) Se sabe que los miembros de $[S]$ de cardinalidad mayor que 1 son los espacios topológicos X que poseen una cubierta encadenada $\mathcal{F}$ de imágenes continuas de S; estas imágenes son: un punto, I_2 y S. Por el ejercicio 4,

$$\mathcal{F}' = \{F \in \mathcal{F} : |F| > 1\}$$

también es una cubierta encadenada de X. Por lo tanto, si el número cardinal de X es mayor que 1, entonces $X \in [S]$ si, y sólo si, X posee una cubierta encadenada cuyos elementos son homeomorfos a I_2 ó a S.

(b) Se tiene la contención propia $[\varnothing] \subset [S]$ porque $[\varnothing] \subseteq [S]$ y porque $S \in [S]$ pero $S \notin [\varnothing]$. Luego, $[S] \neq [\varnothing]$, de modo que, por (b) de la proposición anterior, $[I_2] \subseteq [S]$. Y como S no es indiscreto, entonces $[I_2] \subset [S]$. Por otra parte, si $\underline{A}$ es cualquier categoría de conexión que contiene propiamente a $[I_2]$, entonces existen $X \in \underline{A} - [I_2]$ y un abierto U en X tales que $\varnothing \neq U \neq X$. Sea $f : X \to Y$ la identificación de U en un punto y de $X - U$ en otro punto[2]

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & & \| \\ U & \mapsto & \overbrace{\quad\cdot\quad} \\ & f & \\ X-U & \mapsto & \underbrace{\quad\cdot\quad} \end{array}$$

entonces $Y \cong S$ ó $Y \cong D_2$, según que $X - U$ no sea abierto en X ó sí lo sea. Si $Y \cong D_2$, entonces D_2 es imagen continua de X; luego, $D_2 \in \underline{A}$ y $\underline{A} = Top = [D_2]$; en tal caso, por lo tanto, $[S] \subseteq \underline{A}$. Si $Y \cong S$, entonces $S \in \underline{A}$ y $[S] \subseteq \underline{A}$.@

<u>*Ejercicio:*</u> 5. a) Sea X un espacio topológico tal que $X = U \cup V$, y sean $x_0 \in U$ y $y_0 \in V$ tales que

$$\{x_0, y\} \cong S, \forall y \in V \quad \text{y} \quad \{x, y_0\} \cong S, \forall x \in U$$

Probar que $[X] = [S]$.

b) Sea X cualquier espacio topológico tal que $|X| = 3$. Probar que $[X]$ es una de las siguientes: $[I_2]$, $[D_2]$, $[S]$. [Sugerencia: Usar (a) para probar (b)].

[2]Véase el ejemplo (b) visto en clase "hace exactamente" dos años.

Noviembre 23 de 1987.

Definición. Sean, X un espacio topológico y $\underline{A}$ una categoría de conexión, arbitrarios; si $x \in X$, entonces **la $\underline{\mathbf{A}}$-componente de x** es la unión de todos los subconjuntos de X que contienen a x y pertenecen a $\underline{A}$. Se denotará por $C_{\underline{A}}(x)$.

Proposición. $C_{\underline{A}}(x)$ es el más grande de los subconjuntos de X que pertenecen a $\underline{A}$ y contienen a x.

Demostración. Si consideramos

$$\{A \in \underline{A} : x \in A \subseteq X\}$$

es obvio que

$$\cap \{A \in \underline{A} : x \in A \subseteq X\} \neq \varnothing;$$

por lo tanto

$$\cup \{A \in \underline{A} : x \in A \subseteq X\} = C_{\underline{A}}(x) \in \underline{A}$$

y, además, $x \in C_{\underline{A}}(x)$.@

<u>*Ejemplos:*</u> 1. Si $\underline{A} = [\varnothing]$, entonces $C_{\underline{A}}(x) = \{x\}$.

2. Si $\underline{A} = [D_2]$, entonces $C_{\underline{A}}(x) = X$.

3. Si $X \in \underline{A}$, entonces $C_{\underline{A}}(x) = X$. Recíprocamente, si en X hay sólo una $\underline{A}$-componente, entonces $X \in \underline{A}$.

<u>*Ejercicio:*</u> 6. Sea X un espacio topológico arbitrario. Probar que en X dos $\underline{A}$-componentes coinciden ó son ajenas.

Ahora vamos a iniciar el estudio de algunas de las categorías de conexión más importantes que hay.

Definiciones: *a*) Una **división de un espacio** X es una pareja (U, V) de subconjuntos abiertos de X tal que

$$X = U \cup V \quad \text{y} \quad U \cap V = \varnothing$$

b) La división $(X, \varnothing)$ se llama **división trivial**.

c) Se dice que un espacio topológico es **conexo** si la única división que tiene es la trivial.

Aunque este concepto es puramente topológico, no es debido a un topólogo sino al algebrista francés Camile Jordán.

TEOREMA. La clase $\underline{C}$ de los espacios conexos es la categoría de conexión más grande después de $[D_2]$.

Noviembre 25 de 1987.

Hay que probar que $\underline{C}$ es una categoría de conexión y que $[D_2]$ es la única categoría de conexión que no está contenida en $\underline{C}$.

Demostración. (*a*) Sea $f : C \to X$ una función continua y suprayectiva en la que $C \in \underline{C}$ y sea (U, V) cualquier división de X; entonces $\left(f^{-1}(U), f^{-1}(V)\right)$ es una división de C que, al ser conexo, sólo admite la división trivial. En consecuencia, y debido a la suprayectividad de f, también la división (U, V) es trivial, lo que significa que X también es conexo, i.e. $X \in \underline{C}$.

(*b*) Si $|X| \leq 1$ y (U, V) es una división de X, entonces $U = \varnothing$ o $V = \varnothing$; $\therefore X \in \underline{C}$.

(*c*) Sea X un espacio topológico arbitrario y $(A_i)_J$ cualquier familia de subconjuntos conexos de X tal que $\bigcap_{i \in J} A_i \neq \varnothing$. Sea $A = \bigcup_{i \in J} A_i$ y (U, V) cualquier división de A; entonces $(U \cap A_i, V \cap A_i)$ es una división de A_i que, debido a la conexidad, no puede ser de otro modo sino trivial. Sean, $x \in \bigcap_{i \in J} A_i$ e $i_0 \in J$; sin que se pierda generalidad podemos suponer que $x \in U \cap A_{i_0}$. En consecuencia, $x \in U \cap A_i, \forall i \in J$. Por lo tanto,

$$U \cap A_i \neq \varnothing \text{ y } V \cap A_i = \varnothing, \forall i \in J$$

Luego, $V \cap A = \varnothing$; $\therefore V = \varnothing$ y $U = A$, i.e. (U, V) es trivial y $A \in \underline{C}$.

Esto prueba que $\underline{C}$ es de conexión. Sea, por otro lado, $\underline{A}$ cualquier categoría de conexión tal que $\underline{A} \not\subseteq \underline{C}$; entonces existe $X \in \underline{A} - \underline{C}$. Por lo tanto, X acepta una división no trivial (U, V). Sea

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & D_2 \\ & & \shortparallel \\ U & \mapsto & \cdot \\ V & \mapsto & \cdot \end{array}$$

Entonces f es continua y suprayectiva; $\therefore D_2 \in \underline{A}$; $\therefore \underline{A} = [D_2]$.@

Para denotar a la componente de x respecto de la categoría de conexión $\underline{C}$ escribiremos $C(x)$ en lugar de $C_{\underline{C}}(x)$ y hablaremos simplemente de **la componente de** x, sobreentendiendo que es respecto de $\underline{C}$. Esto concuerda con la nomenclatura tradicional de esta parte de la topología y se debe a que $\underline{C}$ fue la primera categoría de conexión con la que se trabajó inicialmente.

Noviembre 27 de 1987.

En lo que va hasta ahora hemos demostrado las siguientes contenciones propias:

$$[\varnothing] \subset [I_2] \subset [S] \qquad \underline{C} \subset [D_2]$$

Ejercicios: 7. Sea $\underline{B}$ una familia arbitraria de espacios topológicos. Si

$$K(\underline{B}) = \{A \in Top: \text{ toda función continua } f: A \to B \text{ es constante, con } B \in \underline{B}\}$$

pruebe que $K(\underline{B})$ es una categoría de conexión. (Se llama **categoría constante a la izquierda** determinada por $\underline{B}$).

8. Pruebe: *a)* $\underline{B} \subseteq \underline{B}' \Rightarrow K(\underline{B}') \subseteq K(\underline{B})$

b) $\bigcap_{i\in I} K(\underline{B}_i) = K\left(\bigcup_{i\in I} \underline{B}_i\right)$

c) Si $\underline{A}$ es una familia cualquiera de espacios topológicos, sea

$$\underline{B} = \{B \in Top: \text{ toda función continua } f: A \to B \text{ es constante, con } A \in \underline{A}\}$$

Entonces $K(\underline{B})$ es la mínima constante a la izquierda que contiene a $\underline{A}$.

9. Compruebe: *a)* $[\varnothing] = K(Top)$

b) $[I_2] = K(S)$

c) $K(T_1)$ es la mínima categoría de conexión y constante a la izquierda que contiene a $[S]$.

d) $\underline{C} = K(D_2)$.

Teorema. Sea $\underline{B} \subseteq T_1$. Si X es cualquier espacio topológico y A un subconjunto denso en X tal que $A \in K(\underline{B})$, entonces $X \in K(\underline{B})$.

Demostración. Sea $f: X \to B$ cualquier función continua, donde $B \in \underline{B}$. Entonces la función $f \mid A : A \to B$ es continua y, por lo tanto, constante, pues $A \in K(\underline{B})$. Sea b_0 el valor de $f \mid A$ y Supongamos que para algún $x \in X$, $f(x) = b_1$ y que $b_1 \neq b_0$. Dado que en todo espacio T_1 cada punto es cerrado, tenemos

$$B - \{b_0\} \in \mathcal{N}^\circ_{b_1}; \ \therefore f^{-1}(B - \{b_0\}) \in \mathcal{N}^\circ_x;$$

y como A es denso en X, entonces

$$A \cap f^{-1}(B - \{b_0\}) \neq \varnothing \ \underset{\circ}{\nabla}$$

Luego, falso suponer $b_1 \neq b_0$; $\therefore f(x) = b_0, \forall x \in X$; $\therefore X \in K(\underline{B})$.@

Corolario1. Sea $\underline{B} \subseteq T_1$. Si X es cualquier espacio topológico y A un subconjunto de X que pertenece a $K(\underline{B})$ y tal que $A \subseteq D \subseteq \overline{A}$, entonces $D \in K(\underline{B})$.

Demostración. Se sabe que A es denso en $\overline{A}$; en consecuencia, también es denso en D y, por el teorema anterior, $D \in K(\underline{B})$.@

Corolario2. Sea $\underline{B} \subseteq T_1$. En cualquier espacio topológico X, las $K(\underline{B})$-componentes son cerradas.

Demostración. Sea A una $K(\underline{B})$-componente de X. Si $x \in A$, entonces A es el máximo elemento de $K(\underline{B})$ que contiene a x porque es precisamente su $K(\underline{B})$-componente. Pero $x \in A \Rightarrow x \in \overline{A}$ y $\overline{A} \in K(\underline{B})$ porque A es denso en $\overline{A}$ (y por el teorema). Luego, $\overline{A} \subseteq A$, lo que significa que A es cerrada, como se quería demostrar.@

Ejercicio: 10. Sea $\underline{B}$ una familia arbitraria de espacios topológicos. Pruebe:

(a) Si

$$\underline{B}' = \{B \in \underline{B}: |B| > 1\}$$

entonces $K(\underline{B}') = K(\underline{B})$.

(b) Si existe $B \in \underline{B}$ con dos puntos b_1 y b_2 tales que el subespacio

$$\{b_1, b_2\} \cong I_2$$

entonces $K(\underline{B}) = [\varnothing]$.

Teorema. Sean, $\underline{B}$ una familia arbitraria de espacios topológicos y $(X_\lambda)_\Lambda$ una familia no vacía de espacios topológicos no vacíos. Son equivalentes:

(a) $X_\lambda \in K(\underline{B}), \forall \lambda \in \Lambda$

(b) $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \in K(\underline{B})$

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Por el ejercicio 10 (a) podemos restringirnos a trabajar sólo con los miembros de $\underline{B}$ cuyo número cardinal sea mayor que 1 (en caso, desde luego, de que tales miembros existan). Sea

$$f : \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \to B \in \underline{B}$$

cualquier función continua. Hay que probar que f es constante. Sean

$$(\Lambda, f_1), (\Lambda, f_2) \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

¿Qué pasaría si $f(\Lambda, f_1) \neq f(\Lambda, f_2)$? Para empezar

$$\{f(\Lambda, f_1), f(\Lambda, f_2)\} \ncong I_2$$

pues, por (b) del ejercicio 10, lo contrario implicaría que $K(\underline{B}) = [\varnothing]$; entonces $|X_\lambda| = 1, \forall \lambda \in \Lambda$ y, por lo tanto, también $\left|\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda\right| = 1$; $\therefore (\Lambda, f_1) = (\Lambda, f_2)$; $\therefore f(\Lambda, f_1) = f(\Lambda, f_2)$ $\underset{\circ}{\nabla}$

Veamos que tampoco puede ocurrir

$$\{f(\Lambda, f_1), f(\Lambda, f_2)\} \cong S \quad \text{ni} \quad \{f(\Lambda, f_1), f(\Lambda, f_2)\} \cong D_2$$

En efecto, para ambos casos al menos un punto posee una vecindad abierta en B que no contiene al otro. Supongamos que es $f(\Lambda, f_2)$ este punto y que V es la vecindad en cuestión. Debido a la continuidad de f existe una vecindad básica U de (Λ, f_2) tal que $f(U) \subseteq V$; como sabemos, la forma típica de esta vecindad básica es

$$U = P_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap P_{\lambda_2}^{-1}(U_{\lambda_2}) \cap \cdots \cap P_{\lambda_n}^{-1}(U_{\lambda_n})$$

donde cada U_{λ_i} es un abierto en X_{λ_i} y $f_2(\lambda_i) = P_{\lambda_i}(\Lambda, f_2) \in U_{\lambda_i}$.

Por otra parte, si λ_0 es un elemento fijo en Λ y también se fija $(\Lambda, f_0) \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$, entonces se tiene una inmersión de

$$\begin{array}{ccc} X_{\lambda_0} & \to & \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \\ x_{\lambda_0} & \mapsto & \left(\Lambda, f_{x_{\lambda_0}}\right) \end{array}$$

en la que

$$f_{x_{\lambda_0}}(\lambda) = \begin{cases} f_0(\lambda), \text{ si } \lambda \neq \lambda_0 \\ x_{\lambda_0}, \text{ si } \lambda = \lambda_0 \end{cases}$$

Restringiendo el codominio de esta inmersión podemos obtener una función continua y suprayectiva de

$$X_{\lambda_0} \to \left\{\left(\Lambda, f_{x_{\lambda_0}}\right) : x_{\lambda_0} \in X_{\lambda_0}\right\}$$

Entonces

$$\left\{\left(\Lambda, f_{x_{\lambda_0}}\right) : x_{\lambda_0} \in X_{\lambda_0}\right\} \in K(\underline{B})$$

pues, por hipótesis, $X_{\lambda_0} \in K(\underline{B})$ y $K(\underline{B})$ es de conexión.

Fijemos $\lambda_1 \in \Lambda$ y $(\Lambda, f_1) \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$. Siguiendo la idea anterior, hagamos

$$E_1 = \left\{\left(\Lambda, f_{x_{\lambda_1}}\right) : x_{\lambda_1} \in X_{\lambda_1}\right\}$$

Aquí la coordenada x_{λ_1} es arbitraria en X_{λ_1}; las demás son fijas, (son las de (Λ, f_1)). La aplicación

$$x_{\lambda_1} \mapsto \left(\Lambda, f_{x_{\lambda_1}}\right)$$

determina un homeomorfismo de $X_{\lambda_1} \cong E_1$. Ahora fijemos $\lambda_2 \in \Lambda$ y $(\Lambda, g_2) \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, donde

$$g_2(\lambda) = \begin{cases} f_2(\lambda), \text{ si } \lambda = \lambda_1 \\ f_1(\lambda), \text{ si } \lambda \neq \lambda_1 \end{cases}$$

y hagamos

$$E_2 = \left\{ \left(\Lambda, f_{x_{\lambda_2}}\right) : x_{\lambda_2} \in X_{\lambda_2} \right\}$$

donde

$$f_{x_{\lambda_2}}(\lambda) = \begin{cases} g_2(\lambda), \text{ si } \lambda \neq \lambda_2 \\ x_{\lambda_2}, \text{ si } \lambda = \lambda_2 \end{cases}$$

También en este caso obtenemos que $X_{\lambda_2} \cong E_2$. Obsérvese además que $(\Lambda, g_2) \in E_1 \cap E_2$; $\therefore E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$. Similarmente, fijemos $\lambda_3 \in \Lambda$ y $(\Lambda, g_3) \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, donde

$$g_3(\lambda) = \begin{cases} f_2(\lambda), \text{ si } \lambda = \lambda_1, \lambda_2 \\ f_1(\lambda), \text{ si } \lambda \neq \lambda_1, \lambda_2 \end{cases}$$

y hagamos

$$E_3 = \left\{ \left(\Lambda, f_{x_{\lambda_3}}\right) : x_{\lambda_3} \in X_{\lambda_3} \right\}$$

Entonces, $X_{\lambda_3} \cong E_3$ y $(\Lambda, g_3) \in E_2 \cap E_3$; $\therefore E_2 \cap E_3 \neq \varnothing$.

....

Continuando este procedimiento llegamos a fijar $\lambda_{n-1} \in \Lambda$ y $(\Lambda, g_{n-1}) \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, donde

$$g_{n-1}(\lambda) = \begin{cases} f_2(\lambda), \text{ si } \lambda = \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n-2} \\ f_1(\lambda), \text{ si } \lambda \neq \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n-2} \end{cases}$$

y hacemos

$$E_{n-1} = \left\{ \left(\Lambda, f_{x_{\lambda_{n-1}}}\right) : x_{\lambda_{n-1}} \in X_{\lambda_{n-1}} \right\}$$

Finalmente, fijando $\lambda_n \in \Lambda$ y $(\Lambda, g_n) \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, donde

$$g_n(\lambda) = \begin{cases} f_2(\lambda), \text{ si } \lambda = \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n-1} \\ f_1(\lambda), \text{ si } \lambda \neq \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n-1} \end{cases}$$

hacemos

$$E_n = \left\{ \left(\Lambda, f_{x_{\lambda_n}}\right) : x_{\lambda_n} \in X_{\lambda_n} \right\}$$

Entonces, $X_{\lambda_n} \cong E_n$ y $E_{n-1} \cap E_n \neq \varnothing$ porque $(\Lambda, g_n) \in E_{n-1} \cap E_n$.

Ahora bién, aplicando la hipótesis, cada uno de los homeomorfismos anteriores implica que el conjunto E_j correspondiente es miembro de la categoría $K(\underline{B})$; en consecuencia, cada restricción $f \mid E_j$ es constante (porque es continua). Además, como acabamos de ver, estos conjuntos forman una cadena en $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$; por lo tanto, $\bigcup_{j=1}^{n} E_j \in K(\underline{B})$. Entonces f es constante en esta unión, y como $(\Lambda.f_1) \in E_1$, entonces el valor de esta constante es $f(\Lambda, f_1)$. Por último, obsérvese que si hubiese un punto $z \in E_n \cap U$, entonces el valor de z bajo f coincidiría forzosamente con $f(\Lambda, f_1)$, lo cual entraría en contradicción con el hecho de que

$$f(U) \subseteq V\left(\subseteq B - \{f(\Lambda, f_1)\}\right)$$

Miren que un punto como ese es $z = (\Lambda, g)$, donde

$$g(\lambda) = \begin{cases} f_2(\lambda), \text{ si } \lambda = \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \\ f_1(\lambda), \text{ si } \lambda \neq \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \end{cases}$$

por lo que la contradicción efectivamente se tiene. Por lo tanto, falso suponer $f(\Lambda, f_1) \neq f(\Lambda, f_2)$; por lo tanto, f es constante y $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \in K(\underline{B})$.

$(b) \Rightarrow (a)$ Como $K(\underline{B})$ es de conexión y cada λ-proyección $P_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to X_\lambda$ es continua y suprayectiva, si $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \in K(\underline{B})$, entonces cada $X_\lambda \in K(\underline{B})$, como se quiere probar.@

Diciembre 4 de 1987.

En la parte que sigue I denotará, como en otras ocasiones, al intervalo cerrado $[0,1]$ con la topología usual.

Proposición. $I \in \underline{C}$.

Demostración. Sea (U,V) una división arbitraria de I. Entonces $\{U,V\}$ es una cubierta abierta de I; sin perder generalidad podemos suponer que $0 \in U$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$[0,\varepsilon] \subset U$$

Vamos a ver hasta dónde puede crecer ε. Sea

$$A = \{t \in I : [0,t] \subset U\}$$

Entonces $\varepsilon \in A$. Sea $s = \sup A$; entonces $\varepsilon \leq s \leq 1$. Supongamos que $s \in V$; entonces existe un intervalo abierto (x_1, x_2) tal que

$$s \in (x_1, x_2) \subset V$$

Entonces $x_1 < s$; por lo tanto, existe $a \in A$ tal que $x_1 < a < s$. Pero entonces

$$U \cap V \supset (x_1, a] \neq \varnothing \quad \underset{\circ}{\nabla}$$

Luego, falso suponer que $s \in V$; $\therefore s \in U$. Supongamos ahora que $s < 1$; entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$(s-\delta, s+\delta) \subset U$$

Entonces

$$[0,t] \subset U, \forall t \in \left[s, s+\frac{\delta}{2}\right]$$

lo cual contradice el hecho de que $s = \sup A$. Por lo tanto, $s = 1$ y, en consecuencia, $V = \varnothing$ y $U = I$. Por lo tanto I es conexo, como se quería probar.@

Definición. Un espacio topológico X es **conectable por trayectorias (c.p.t.)**[3] si para todo par de puntos $x_0, x_1 \in X$ existe una función continua $f : I \to X$ tal que $f(0) = x_0$ y $f(1) = x_1$. A f se la llama **trayectoria en X de origen $\mathbf{x_0}$ y extremo $\mathbf{x_1}$**.

Teorema. $[I]$ es la clase de los espacios c.p.t.

Demostración. 1º Todo espacio c.p.t. pertenece a $[I]$.

Sea X cualquier espacio c.p.t. y sea x_0 cualquier punto fijo en X. Si $\mathcal{F}$ es la familia de imágenes de trayectorias en X de origen x_0, entonces $\mathcal{F}$ es una cubierta encadenada en X cuyos elementos son imágenes continuas de I; $\therefore X \in [I]$.

Diciembre 7 de 1987.

2º Todo miembro de $[I]$ es c.p.t.

Sea $X \in [I]$ y sean $x_0, x_1 \in X$. Se sabe que X posee una cubierta encadenada $\mathcal{F}$ cuyos miembros son imágenes continuas de I. Sean $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $x_0 \in A$ y $x_1 \in B$, y sea $A_1, ..., A_n$ una cadena de elementos de $\mathcal{F}$ tal que $A_1 = A$ y $A_n = B$. Como cada eslabón es imagen continua de I, existen n funciones $f_j : I \to X$ tales que

$$f_j(I) = A_j, \forall j \in \{1, 2, ..., n\}$$

[3] *Recomendación del autor:* No confundir con "**contador público titulado**" ‿̈

De este modo, $A_1 = f_1(I)$;

$$\therefore x_0 = f_1(a_1), \text{ p.a. } a_1 \in I$$

Y si $y_1 \in A_1 \cap A_2$, entonces

$$y_1 = f_1(b_1), \text{ p.a. } b_1 \in I$$

Pero $A_2 = f_2(I)$; entonces también

$$y_1 = f_2(a_2), \text{ p.a. } a_2 \in I$$

Y si $y_2 \in A_2 \cap A_3$, entonces

$$y_2 = f_2(b_2), \text{ p.a. } b_2 \in I \quad \text{y} \quad y_2 = f_3(a_3), \text{ p.a. } a_3 \in I$$

Continuando con este proceso tenemos para $y_{n-1} \in A_{n-1} \cap A_n$ que

$$y_{n-1} = f_{n-1}(b_{n-1}), \text{ p.a. } b_{n-1} \in I \quad \text{y} \quad y_{n-1} = f_n(a_n), \text{ p.a. } a_n \in I$$

Finalmente,

$$x_1 = f_n(b_n), \text{ p.a. } b_n \in I$$

Ahora dividamos a I en n partes iguales y definamos f del modo que sigue:

$$f(t) = \begin{cases} f_1\ell_1(t), \text{ si } t \in \left[0, \frac{1}{n}\right], \text{ donde } \ell_1 \text{ aplica linealmente a } \left[0, \frac{1}{n}\right] \text{ en } [a_1, b_1] \\ f_2\ell_2(t), \text{ si } t \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \text{ donde } \ell_2 \text{ aplica linealmente a } \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \text{ en } [a_2, b_2] \\ f_3\ell_3(t), \text{ si } t \in \left[\frac{2}{n}, \frac{3}{n}\right], \text{ donde } \ell_3 \text{ aplica linealmente a } \left[\frac{2}{n}, \frac{3}{n}\right] \text{ en } [a_3, b_3] \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_{n-1}\ell_{n-1}(t), \text{ si } t \in \left[\frac{n-2}{n}, \frac{n-1}{n}\right], \text{ donde } \left[\frac{n-2}{n}, \frac{n-1}{n}\right] \overset{\ell_{n-1}}{\to} [a_{n-1}, b_{n-1}] \text{ es lineal} \\ f_n\ell_n(t), \text{ si } t \in \left[\frac{n-1}{n}, 1\right], \text{ donde } \ell_n \text{ aplica linealmente a } \left[\frac{n-1}{n}, 1\right] \text{ en } [a_n, b_n] \end{cases}$$

Examinemos lo que ocurre en $t = \frac{1}{n}$:

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = f_1\ell_1\left(\frac{1}{n}\right) = f_1(b_1) = y_1 = f_2(a_2) = f_2\ell_2\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right)$$

e igual ocurre en los otros puntos en común. Por lo tanto, f está bien definida. También es continua porque

$$\left\{\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], ..., \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]\right\}$$

es una cubierta cerrada finita de I en cada uno de cuyos intervalos la correspondiente restricción de f es continua. Esto prueba que f es una trayectoria de x_0 a x_1. Por lo tanto, X es c.p.t.@

Miércoles 9 de diciembre de 1987.

Ejemplos de espacios c.p.t. 1. Todo espacio euclidiano es c.p.t.
Sea $\mathbb{E}^n$ cualquier espacio euclidiano. Si

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{E}^n$$

sea $f : I \to \mathbb{E}^n$ la función

$$f(t) = (1-t)x + ty$$

f es continua porque lo son sus proyecciones

$$P_i f(t) = (1-t)x_i + ty_i$$

Además

$$f(0) = x \quad \text{y} \quad f(1) = y$$

i.e. f es una trayectoria de x a y.

2. Los subconjuntos de $\mathbb{E}$ que son c.p.t. son los intervalos.

a) Todo intervalo es c.p.t.

Sea J cualquier intervalo; si $a, b \in J$, sea $f : I \to J$ la función

$$f(t) = (1-t)\,a + tb$$

Entonces f es una trayectoria de a a b.

b) Sea J cualquier subconjunto c.p.t. de $\mathbb{E}$. Entonces para cualesquiera $a, b \in J$ existe una trayectoria $f : I \to J$ de a a b. Sea $t \in \mathbb{E}$ tal que $a < t < b$; si $t \notin J$, entonces una división no trivial de J la dan

$$U = \{x \in \mathbb{E} : x < t\} \cap J \quad \text{y} \quad V = \{x \in \mathbb{E} : x > t\} \cap J$$

lo cual es absurdo, pues J es conexo[4]. En consecuencia, J es tal que para cualesquiera $a, b \in J$ resulta que $[a, b] \subseteq J$. Por lo tanto, J es un intervalo (todo subconjunto de $\mathbb{E}$ con esta propiedad es un intervalo).

Teorema. Sea $(X_\lambda)_\Lambda$ una familia no vacía de espacios topológicos no vacíos. Son equivalentes:

(a) X_λ es c.p.t.,$\forall \lambda \in \Lambda$

(b) $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ es c.p.t.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Sean $(\Lambda, f_1), (\Lambda, f_2) \in \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$; por (a), para cada $\lambda \in \Lambda$ existe una trayectoria $f_\lambda : I \to X_\lambda$ de $f_1(\lambda)$ a $f_2(\lambda)$. Por la propiedad universal del producto topológico existe una función continua $f : I \to \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ tal que $P_\lambda f = f_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda$. Entonces

$$\begin{aligned} P_\lambda(f(0)) &= f_\lambda(0) = f_1(\lambda)\,; \ \therefore f(0) = (\Lambda, f_1) \\ P_\lambda(f(1)) &= f_\lambda(1) = f_2(\lambda)\,; \ \therefore f(1) = (\Lambda, f_2) \end{aligned}$$

i.e. f es una trayectoria de (Λ, f_1) a (Λ, f_2).

$(b) \Rightarrow (a)$ $P_\lambda : \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to X_\lambda$ es continua y suprayectiva. Por (b), $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \in [I]$; $\therefore X_\lambda \in [I]$.@

Diciembre 11 de 1987.

Antes de iniciar la prueba del teorema que sigue es conveniente recordar que $\underline{C}$ *es una categoría constante a la izquierda; para ser más precisos:* $\underline{C} = K(D_2)$*, [ejercicio 9(d)]. Y hay que observar también que* $D_2 \in T_1$*, de manera que puede aplicarse el resultado del primer teorema visto en la clase del día 27 a cualquier espacio que contenga un subespacio denso y conexo.*

Teorema. $[I] \subset \underline{C}$.

Demostración. Como ya sabemos, $I \in \underline{C}$; por lo tanto, $[I] \subseteq \underline{C}$. Para probar que la contención es propia, es preciso exhibir un espacio conexo que no sea c.p.t. Sea

$$X = \left\{ \left(x, \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1 \right\} \cup \{(0,0)\}$$

La función

$$\begin{array}{ccc} (0,1] & \xrightarrow{f} & X \\ t & \longmapsto & \left(t, \operatorname{sen}\frac{1}{t}\right) \end{array}$$

es continua. En consecuencia, su imagen

$$\left\{ \left(x, \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1 \right\}$$

es un espacio c.p.t. y por lo tanto conexo. También es densa en X, (su complemento es un punto de su cerradura). *Por el teorema mencionado arriba se sigue que* $X \in \underline{C}$. Se puede probar que $X \notin [I]$. Nótese que esto implica que **[I] no es constante a la izquierda** porque de ser así, el teorema mencionado implicaría que $X \in [I]$, lo que es falso.@

[4] ¿Por qué?

11.1 Conexidad Local

En la parte que sigue, siempre que se diga que tal o cual espacio es "$\underline{A}$-conexo" se deberá entender (simplemente) que el susodicho espacio es miembro de $\underline{A}$.

Definición. Sea $\underline{A}$ cualquier categoría de conexión. Un espacio topológico **X es localmente $\underline{\mathbf{A}}$-conexo** si cada uno de sus puntos posee una base local de vecindades abiertas y $\underline{A}$-conexas.

Ejemplos: 1. Todo espacio discreto es localmente $\underline{A}$-conexo cualquiera que sea $\underline{A}$.

En efecto, si X es discreto y $x \in X$, entonces $\{\{x\}\}$ es una base local en x de "vecindades" abiertas y $\underline{A}$-conexas, porque $\{x\} \in \underline{A}$ cualquiera que sea $\underline{A}$.

2. Todo espacio indiscreto es localmente $\underline{A}$-conexo si $\underline{A} \neq [\varnothing]$.

Sea X un espacio indiscreto; entonces $X \in \underline{A}$, porque $\underline{A} \neq [\varnothing]$. Por lo tanto, $\{X\}$, la única base local de cualquier $x \in X$, tiene una sola vecindad $\underline{A}$-conexa y abierta.

3. Todo espacio euclidiano es localmente $\underline{A}$-conexo si $\underline{A} \supseteq [I]$.

Sea $x \in \mathbb{E}^n$; una base local de x es

$$\{D_\varepsilon(x) : \varepsilon > 0\}$$

cuyos miembros son claramente abiertos y c.p.t., por lo tanto $\underline{A}$-conexos, si $\underline{A} \supseteq [I]$.

Enero 6 de 1988.

Teorema. Sea X cualquier espacio topológico; son equivalentes:

(a) X es localmente $\underline{A}$-conexo.

(b) Si U es abierto en X, entonces las $\underline{A}$-componentes del subespacio U son conjuntos abiertos de X.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Sea U abierto en X; si A es una $\underline{A}$-componente de U, sea $a \in A$. Entonces $U \in \mathcal{N}_a$; por (a), existe $V \in \mathcal{N}_a^\circ$ tal que $V \subseteq U$ y $V \in \underline{A}$. Entonces $V \subseteq A$, porque A es el $\underline{A}$-conexo máximo que contiene a a. Esto prueba que A es abierta.

(b) $\Rightarrow$ (a) Sea $x \in X$ y $U \in \mathcal{N}_x^\circ$; por (b), la $\underline{A}$-componente de x en U está en $\mathcal{N}_x^\circ$. Luego, X es localmente $\underline{A}$-conexo.@

Corolario. Sea $p : X \to Y$ un cociente arbitrario. Si X es localmente $\underline{A}$-conexo, entonces Y también lo es.

Demostración. Sea V abierto en Y; entonces $p^{-1}(V)$ es abierto en X y, por (b) del teorema, toda $\underline{A}$-componente de $p^{-1}(V)$ es abierta en X. Sea B cualquier $\underline{A}$-componente de V y escojamos un punto $b \in B$ arbitrario. Si A es la $\underline{A}$-componente de $p^{-1}(V)$ en la que se haya $p^{-1}(b)$, entonces

$$p(A) \cap B \neq \varnothing$$

Pero $p(A) \in \underline{A}$, porque p es continua; luego, no hay más remedio que aceptar que $p(A) \subseteq B$. Como p es un cociente, $p(A) \in \mathcal{N}_b^\circ$. Por lo tanto, B es abierta en Y y Y localmente $\underline{A}$-conexo.@

Enero 11 de 1988.

A continuación un resumen referente a los resultados de conexidad relacionados con el producto topológico.

1. Para cualquier categoría de conexión $\underline{A}$, el producto topológico de un número finito de espacios topológicos es $\underline{A}$-conexo si, y sólo si, cada factor es $\underline{A}$-conexo. (16 | *xi* | 87)

2. Si $\underline{A}$ es constante a la izquierda, entonces el producto topológico de cualquier familia (finita ó infinita) es $\underline{A}$-conexo si, y sólo si, cada factor es $\underline{A}$-conexo. (27 | *xi* | 87)

3. Si $\underline{A}$ es la categoría de los espacios c.p.t., entonces el producto topológico de cualquier familia no vacía de espacios no vacíos es $\underline{A}$-conexo si, y sólo si, cada factor es $\underline{A}$-conexo. (9 | *xii* | 87)

Teorema. Si $(X_\lambda)_\Lambda$ es una familia no vacía de espacios topológicos no vacíos tal que $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ es localmente $\underline{A}$-conexo; entonces cada factor X_λ es localmente $\underline{A}$-conexo y todos, salvo un número finito, son $\underline{A}$-conexos.

Demostración. Por hipótesis $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ es localmente $\underline{A}$-conexo. Cada λ-proyección es un cociente, por ser cada una una función abierta[5]. Aplicando el resultado del corolario anterior resulta que cada X_λ es localmente

[5]Véase el inciso (b) de la proposición del 9 de septiembre de 1985.

$\underline{A}$-conexo. Si ahora tomamos $(\Lambda, f) \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ arbitrario, entonces existe una vecindad abierta U de (Λ, f) que es $\underline{A}$-conexa; esta vecindad contiene a su vez una vecindad básica de la forma

$$U_{\lambda_1} \times U_{\lambda_2} \times \cdots \times U_{\lambda_n} \times \prod_{\lambda\neq\lambda_1,..,\lambda_n} X_\lambda$$

En consecuencia, si $\lambda \neq \lambda_1, ..., \lambda_n$ se tiene

$$X_\lambda = P_\lambda \left(U_{\lambda_1} \times U_{\lambda_2} \times \cdots \times U_{\lambda_n} \times \prod_{\lambda\neq\lambda_1,..,\lambda_n} X_\lambda \right) \subseteq P_\lambda (U) \subseteq X_\lambda$$

i.e. $P_\lambda (U) = X_\lambda$. Por lo tanto, X_λ es $\underline{A}$-conexo si $\lambda \neq \lambda_1, ..., \lambda_n$.@

Enero 18 de 1988.

Teorema. Sea $\underline{A}$ una categoría de conexión tal que cualquier familia de espacios $\underline{A}$-conexos tiene producto topológico $\underline{A}$-conexo, (v.gr. cuando $\underline{A}$ es constante a la izquierda ó cuando $\underline{A}$ es la categoría de los espacios c.p.t.). Sea $(X_\lambda)_\Lambda$ una familia no vacía (finita ó infinita) de espacios topológicos no vacíos, localmente $\underline{A}$-conexos y tal que todos, excepto un número finito, son $\underline{A}$-conexos. Entonces $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ es localmente $\underline{A}$-conexo.

Demostración. Sean, (Λ, f) cualquier punto de $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, U una vecindad de (Λ, f) y

$$U_{\lambda_1} \times U_{\lambda_2} \times \cdots \times U_{\lambda_n} \times \prod_{\lambda\neq\lambda_1,..,\lambda_n} X_\lambda \subseteq U$$

una vecindad básica de (Λ, f). Como, a excepción de un número finito, casi todos los miembros de $(X_\lambda)_\Lambda$ son $\underline{A}$-conexos, podemos suponer que $X_\lambda \in \underline{A}$, si $\lambda \neq \lambda_1, ..., \lambda_n$. Pero además todos, sin excepción, son localmente $\underline{A}$-conexos; en consecuencia, cada U_{λ_i} puede escogerse $\underline{A}$-conexo en $\mathcal{N}^\circ_{f(\lambda_i)}$. Finalmente, como $\underline{A}$ es una categoría cerrada bajo la formación de productos topológicos, tenemos que

$$U_{\lambda_1} \times U_{\lambda_2} \times \cdots \times U_{\lambda_n} \times \prod_{\lambda\neq\lambda_1,..,\lambda_n} X_\lambda \in \underline{A}$$

Por lo tanto, $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ es localmente $\underline{A}$-conexo.@[6]

Un recuento de la jerarquía inducida por la contención en las categorías de conexión que hasta aquí consideramos pone fin a esta parte.

$$[\varnothing] \subset [I_2] \subset [S] \subseteq K(T_1) \qquad [I] \subset \underline{C} \subset [D_2]$$

[6]Confronte estos dos últimos teoremas con el teorema visto en la clase del 24 de agosto.